SÉRIE A, N° 3866
N° D'ORDRE : 4717

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ALEXIS LAGARDE

1re THÈSE

ÉTUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE ET PHOTOÉLASTIQUE D'UN BARREAU BIRÉFRINGENT SOUMIS A DES VIBRATIONS

2e THÈSE

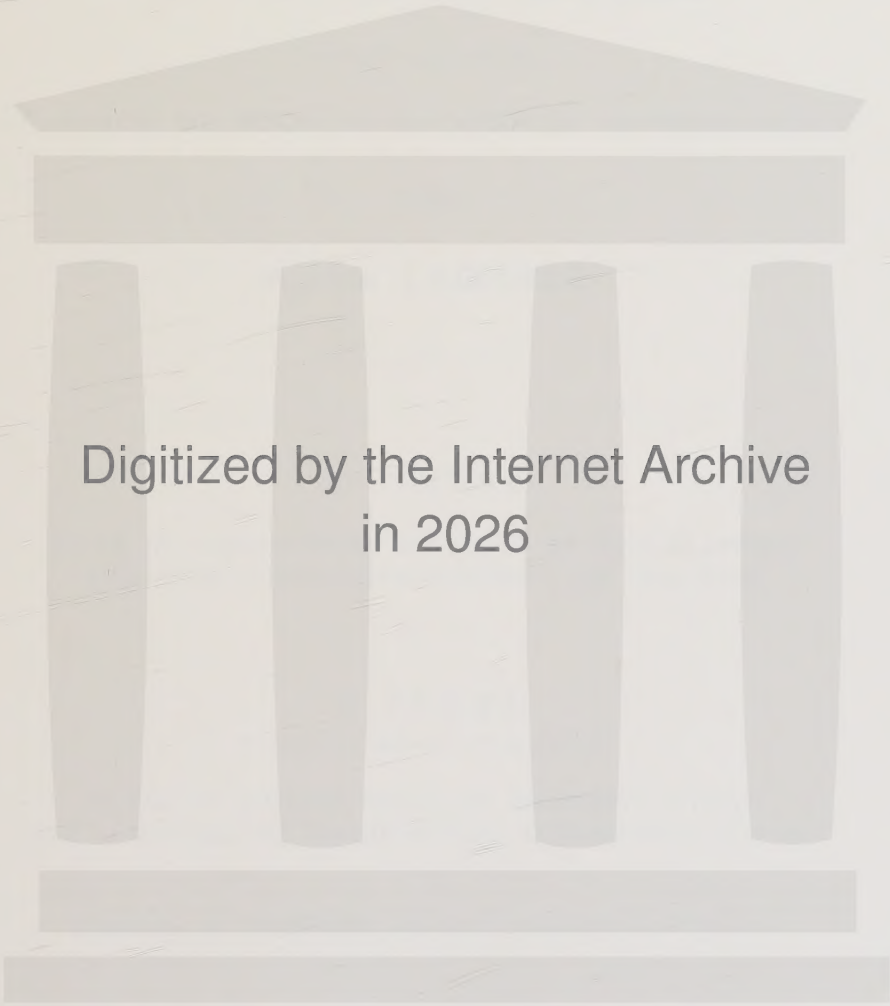
PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

EXPOSÉ DE QUELQUES RÉSULTATS RÉCEMMENT OBTENUS SUR LA FONCTION DE RÉPARTITION DES VITESSES MOLÉCULAIRES

Soutenues, le 7 avril 1962, devant la Commission d'Examen

Jury

MM. PONCIN — *Président.*
GAUTHIER
MAZET — *Examinateurs.*
BROUSSE


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538117_0025

Série A, n° 3866
N° d'ordre : 4717

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alexis LAGARDE

1re THÈSE

ÉTUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE ET PHOTOÉLASTIQUE D'UN BARREAU BIRÉFRINGENT SOUMIS A DES VIBRATIONS

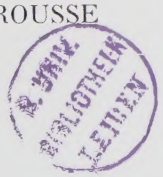
2e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

EXPOSÉ DE QUELQUES RÉSULTATS RÉCEMMENT OBTENUS SUR LA FONCTION DE RÉPARTITION DES VITESSES MOLÉCULAIRES

Soutenues, le 7 avril 1962, devant la Commission d'Examen

Jury — MM. PONCIN, *Président.* — GAUTHIER, MAZET, BROUSSE, *Examinateurs.*



ÉTUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE ET PHOTOÉLASTIQUE D'UN BARREAU BIRÉFRINGENT SOUMIS A DES VIBRATIONS

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen ..... M. ZAMANSKY

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
DE BROGLIE ..	T	Théories physiques.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.
WYART.....	T	Minéralogie et cristal.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie vég. (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN ...	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI.....	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) et sédim.
GAUTHERET ...	T	Biologie vég. (P.C.B.).
LUCAS R.	T	Recherches physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND.....	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER.....	T	Mécanique exp. des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC ..	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS .	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du globe.
L'HÉRITIER ...	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET.....	T	Radio-électricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER ...	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT ...	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES ..	T	Théories physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et cristallog.
J. P. MATHIEU..	T	Physique (optique).
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN ...	T	Biologie végétale marine.
GUINIER.....	T	Physique des solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD.....	T	Aviation (tech. aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.
NORMANT.....	T	Synthèse organique générale.
BENARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appl.
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD....	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS ...	T	Anatomie et histologie comp.
EHRESMANN ...	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD ...	T	Géographie phys. et géologie dynamique.
GODEMENT ...	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Tech. mathém. de la phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT.	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX ...	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY.		Biologie végétale (P.C.B.).
PIAUX	T	Chimie (P.P.C.).
BRUN	T	Mécan. théorique des fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL ..	T	Mathém. (agrégation).
Mme LELONG ..	T	Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
COTTE.....	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E. ..	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.

Rouault	T	Électricité (Orsay).
Gauthier	T	Mécanique appliquée.
Barchewitz ...	T	Chimie physique.
Brossel.....	T	Physique atomique.
Buser		Physiologie comparée.
Camus		Physiologie vég. (B.M.P.V.).
Castaing	T	Physique (Orsay).
Curien	T	Minéralog. et cristallog.
Moyse	T	Physiologie vég. (Orsay).
Noirot		Évolution des êtres organisés.
Pannetier	T	Chimie générale (Orsay).
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann.....	T	Chimie théorique.
Teillac	T	Physique nucl. et radioactiv.
Tonnelat	T	Biologie physico-chim.
Ville	T	Économétrie.
Willemart ...		Chimie (P.C.B.).
Dode	T	Chimie (Orsay).
Freymann	T	Recherches physiques.
Guinochet ...	T	Biol. vég. (S.P.C.N.) (Orsay).
Rollet	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle Josien ...	T	Chimie (S.P.C.N.).
Chevalley ...	T	Géométrie algébrique et théor. des groupes.
Arnoult	T	Électronique (Orsay).
Chapelle	T	Physique (Orsay).
Delange	T	Mathématiques (Orsay).
Deny	T	Mathématiques gén. (Orsay).
Germain	T	Mécan. théor. des fluides.
Lucas G.	T	Géologie.
Allard	T	Chimie physique.
Berthelot ...	T	Phys. fondamentale des hautes énergies (Orsay).
Bricart	T	Météorologie et phys. de l'atmosphère.
Mme Albe-Fessard		Psychophysiologie.
Friedel		Physique des solides (Orsay).
M. Julia		Études des moléculaires naturelles complexes.
Lender	T	Biol. anim. (S.P.C.N.) (Orsay).
Magat		Physico-chimie des radioéléments.
Mlle Quintin ..	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit.....	T	Physiol. anim. (Orsay).
De Possel ...	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Haissinsky ...	T	Radiochimie.
Lemée	T	Phys. vég. (B.M.P.V.) (Orsay).
Guérin	T	Chimie (M.P.C.) (Orsay).
Chatelet M. ..		Chimie (P.C.B.).
Jean	T	Phys. nucléaire (Orsay).
Mattler	T	Phys. (S.P.C.N.) (Orsay).
Michel L.		Phys. théor. des hautes énerg. (Orsay).
Bergerard ...		Zoologie (Orsay).
Bertein		Électronique (Orsay).
Bouissières ..		Chimie des radioéléments (Orsay).
Mme Couture .		Thermodynamique et méc. physique.
Ellenberger..		Géologie appl. sur le terr.
Franc		Biologie animale (P.C.B.).
Schnell		Botanique tropicale (Orsay).
Stolkowsky ..		Physiologie générale.
Acher.		Chimie biol. (Orsay).
Beaudoin		Biologie animale (P.C.B.).
Beaumont.....		Biologie animale (S.P.C.N.).
Blamont.....		Géophysique ionosphère.
Bourreau.....		Botanique.
Curie D.		Physique (M.C.P.).
Durand-Delgag ..		Géologie.
Fréon	T	Chimie organique (Orsay).
Heller		Physiologie végétale.
Tortrat		Calcul des probabilités.
Cailleux		Géologie (S.P.C.N.).
Magnan.....	T	Physique (S.P.C.N.).
Daudel	T	Mécanique ondulatoire appl. à la chim. théor. et à la phys. nucléaire.
Mlle Fourcroy .		Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mme Choquet-Bruhat	T	Méc. analyt. et méc. céleste.
Mlle Veil		Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck....	T	Mécan. phys. et expérim.
Lacombe	T	Métallur. des métaux nucl.
Brochard	T	Physique (P.C.B.) (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur.....	T	Mathématiques (M.P.C.) (Ors
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).
Caire		Géographie phys. et géologie. namique.
Comolet		Mécanique des fluides.
Corabœuf.....		Physiologie animale.
Delloue		Physique de l'exosphère.
Gorenflot ...		Botanique II (Orsay).
Houillon		Biologie animale (P.C.B.).
Jullien J.		Chimie (P.C.B.).
Malgrange ...		Tech. math. de la phys.
Olivier		Antropologie.
Nozeran	T	Botanique II (Orsay).
Blanc-Lapierre		Physique (E.N.S.) (Orsay).

Secrétaire général ..... R Poullain

A ma femme.

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER. — **Étude au voisinage de la résonance** 5

1 Étude théorique de la réponse 6
1,1 Vibrations libres 6
1,2 Vibrations forcées 7
1,3 Existence et unicité de la solution 9
1,4 Remarques 10
1,5 Étude de la réponse forcée 12

2 Dispositifs expérimentaux et méthode de mesure 14
2,1 Réalisation des conditions mathématiques aux limites 14
2,2 Réalisation et mesure de l'excitation 17
2,3 Mesure de la réponse 18

3 Détermination des caractéristiques mécaniques 20
3,1 Coefficient d'élasticité 20
3,2 Coefficient de viscosité 22
3,3 Influence de la température sur les caractéristiques mécaniques 24

4 Choix et qualité du moule mathématique 26
4,1 Courbe de résonance 27
4,2 Amplitude de la réponse 28
4,3 Phase de la réponse 30

5 Conclusion 31

CHAPITRE II. — **Étude mécanique en dehors de la résonance** 32

1 Principe de la méthode de mesure 32

2 Réalisation expérimentale 33
2,1 Description de l'appareil 33
2,2 Fonctionnement de l'excitateur 34
2,3 Mesure de la force excitatrice 36
2,4 Mesure de la réponse de l'éprouvette 36

3 Caractéristiques mécaniques en régime stationnaire 37
3,1 Raideur 37
3,2 Amortissement 39

4 Détermination statique du coefficient d'élasticité 39

Bilan de l'étude mécanique 41

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE PHOTOÉLASTIQUE

PAGES

CHAPITRE III. **Position du problème** 45

CHAPITRE IV. — **Recherche d'une loi reliant l'effet photoélastique aux contraintes et aux déformations** 50

1 Dispositif expérimentaux 50
1,1 Banc d'optique 50
1,2 Photomultiplicateur 50

2 Expression analytique de la réponse photoélastique 51
2,1 Méthode de dépouillement 51
2,2 Expression analytique 53

3 Problème fondamental : Comment exprimer la réponse photoélastique en fonction des contraintes et des déformations 57
3,1 Critères 57
3,2 Méthode de mesure 59
3,3 Résultats expérimentaux 62

4 Essai d'interprétation de la réponse photoélastique à partir des lois classiques 66

5 Détermination de la constante photoélastique 68
5,1 Influence de l'amplitude et de la fréquence de la contrainte 68
5,2 Influence de la température 68
5,3 Essai statique 69

6 Conclusion 69

TROISIÈME PARTIE

APPLICATIONS

CHAPITRE V. — **Courbe de phase. Études de lâcher** 73

1 Courbe de phase 73

2 Lâcher à la résonance 73

3 Lâcher au sens général 74
3,1 Étude théorique 74
3,2 Réalisation expérimentale 75
3,3 Résultats expérimentaux 76

Conclusion 77

BIBLIOGRAPHIE 79

INTRODUCTION

L'étude théorique de la répartition des contraintes développées dans un solide, sous l'effet de sollicitations extérieures, se heurte à de grandes difficultés. La résolution des équations, fournies par la théorie de l'élasticité, est rarement possible en dehors de quelques cas simples.

Pour remédier à ces insuffisances, les méthodes purement mathématiques doivent s'associer à des méthodes expérimentales d'analyse des contraintes.

Parmi celles-ci, une des plus satisfaisantes est la photoélasticimétrie.

Elle est basée sur la propriété d'être biréfringents que possèdent certains solides en état de contraintes.

L'utilisation des méthodes photoélastiques a été largement favorisée par le développement de la fabrication des nouvelles résines synthétiques offrant des matériaux faciles à usiner et biréfringents sous de faibles charges.

L'emploi de ces matériaux visco-élastiques dont le comportement mécanique est encore mal connu en dynamique, pose, du point de vue photoélastique, le problème de la validité de la loi fondamentale biréfringence contrainte. En statique, au cours d'un essai de traction d'un barreau par exemple, les diverses grandeurs mesurables : déformation, contrainte, biréfringence revêtent *simultanément* leurs valeurs d'équilibre; elles sont, pour ainsi dire, en *phase*. En dynamique (limitée au régime sinusoïdal établi), de même qu'il existe un *déphasage* entre la contrainte et la déformation, on doit s'attendre à en constater un (disons plutôt : un *décalage* car le phénomène n'est pas *a priori* linéaire) entre la biréfringence et la déformation, et un autre (déduit des deux premiers) entre la biréfringence et la contrainte. Peut-on mesurer ces retards au cours d'une période, pour différentes valeurs de l'amplitude et de la fréquence d'excitation, et en déduire des conséquences quant à la contribution respective éventuelle de la contrainte et de la déformation à la biréfringence ?

L'examen de ce problème fondamental de la photoélasticimétrie nécessite une étude mécanique du matériau. C'est donc sous le double aspect, mécanique et photoélastique, que nous avons conduit nos recherches sur le comportement de certains matériaux (araldite, plexiglas M. 222 et C.R. 39) soumis à des excitations sinusoïdales.

L'étude est effectuée dans le cadre d'une schématisation d'un barreau en vibrations longitudinales forcées, soit au voisinage de la fréquence de la vibration libre, soit loin de cette fréquence.

La première partie de notre travail est consacrée à l'étude mécanique. Nous nous sommes efforcés de déterminer le moule mathématique qui paraisse le mieux adapté au matériau en régime établi, c'est-à-dire qui permette de prévoir sa réponse correcte en contrainte et déformation à une excitation harmonique de fréquence arbitraire.

L'étude photoélastique — deuxième partie — est effectuée d'un point de vue global. Elle consiste à déterminer l'expression analytique de l'intensité lumineuse transmise $I(t)$, à partir des données de l'expérience (ce qui a l'avantage de tenir compte implicitement de la biréfringence résiduelle). Le problème de la loi fondamentale n'est pas traité en fonction directe de la biréfringence (différence de marche) mais en fonction d'une quantité sans dimension : l'effet photoélastique. On appelle ainsi, la détermination convenable de arc sin $\sqrt{I(t)/I_m}$, I_m désignant le niveau maximal de $I(t)$. Il est d'abord montré que l'effet photoélastique est, en première approximation en ce qui concerne la phase relative, une fonction linéaire de la contrainte et de la déformation. Des critères précis sont ensuite établis sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes. Ils permettent d'apprécier le déphasage de l'effet photoélastique par rapport à la déformation ou par rapport à la contrainte dans les cas simples où ce déphasage est *nul*, ce qui est le cas, aux erreurs de mesures près, d'une manière assez surprenante, pour les matériaux étudiés. Les raisons de cette coïncidence, surtout lorsqu'elle se produit entre effet photoélastique et contrainte (plexiglas M. 222), restent à élucider. Dans cette étude la constante photoélastique est déterminée pour l'araldite.

Dans la troisième partie, nous traitons brièvement quelques applications.

Je suis très heureux d'exprimer ici ma profonde gratitude à M. Mazet, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris; les conseils qu'il m'a donnés, les notes bibliographiques qu'il m'a obligeamment communiquées, l'aide matérielle qu'il m'a procurée ont énormément facilité ma tâche. J'adresse également l'expression de ma très vive reconnaissance à M. Brousse, Doyen de la Faculté des Sciences de Poitiers, Directeur du Laboratoire de Mécanique; la bienveillance qu'il m'a toujours témoignée a été pour moi un encouragement précieux tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier M. Jacquesson, Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, qui m'a initié à la photoélasticimétrie et a permis que ces recherches soient effectuées dans son laboratoire.

Mes remerciements vont aussi à tous les chercheurs et techniciens du Laboratoire de Mécanique pour les conseils et les critiques qu'ils m'ont apportés et pour l'aide matérielle dont j'ai bénéficié à chaque instant.

Qu'il me soit enfin permis de remercier M. l'Ingénieur Général Vernotte grâce à qui la présentation matérielle et la publication de ce travail ont été possibles.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE MÉCANIQUE

Chapitre Premier

ÉTUDE AU VOISINAGE DE LA RÉSONANCE

Nous considérons une éprouvette prismatique dont la section rectangulaire a des dimensions faibles par rapport à la longueur. Elle est encastrée à une extrémité et supporte, à l'extrémité libre, une bobine excitatrice. Nous nous proposons d'étudier la réponse de l'éprouvette, en vibrations longitudinales, à une excitation sinusoïdale; celle-ci est exercée, à l'extrémité libre, suivant l'axe longitudinal de symétrie de l'éprouvette.

Nous schématisons de la manière suivante :

— toute section normale à l'axe reste plane au cours du mouvement; soient x son abscisse au repos, à partir de l'encastrement, et $u\,(x,\,t)$ son déplacement;

— le système de forces appliquées donne naissance à une contrainte σ uniforme sur chaque section. Désignons le coefficient d'élasticité par E', le coefficient de viscosité — supposé petit — par μ, l'extension par $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Nous prendrons le moule mathématique linéaire de Kelvin-Voigt :

$$\sigma = E'\,\varepsilon + \mu\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

E' et μ étant deux constantes.

L'expérience conduit à ce choix car la réponse est proportionnelle à l'excitation et la courbe de résonance a la même allure que celle d'un système linéaire amorti à un degré de liberté.

Dans le cadre de cette schématisation, nous étudierons la réponse du système à une excitation donnée, nous établirons les relations qui nous permettront, compte tenu de résultats expérimentaux, de déterminer les caractéristiques de raideur et d'amortissement en fonction de différentes variables (amplitude et pulsation d'excitation, géométrie du matériau, température). Ces données nous permettront d'adapter au mieux le moule mathématique au matériau. Le problème sera ensuite d'apprécier la qualité de ce nouveau moule en vérifiant éventuellement certains résultats qu'il implique, autres que ceux qui ont permis de préciser sa forme.

1 ÉTUDE THÉORIQUE DE LA RÉPONSE

1,1 Vibrations libres.

Le moule mathématique linéaire conduit à l'équation de propagation classique :

$$\text{(1)} \qquad E' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \, \partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ρ étant la masse spécifique.

Supposons l'éprouvette soumise à l'un de ses modes principaux de vibrations :

$$u = X(x)\, q(t).$$

L'équation (1) est satisfaite si :

$$\text{(2)} \qquad \frac{\ddot{X}_{xx}}{X} = \frac{\rho \ddot{q}_{tt}}{E'q + \mu \dot{q}_t} = -k^2,$$

k étant une constante arbitraire,

$$X = C \sin kx + F \cos kx,$$
$$q = e^{-at} [A \sin \omega t + B \cos \omega t]$$

avec :

$$a = \frac{\mu k^2}{2\rho}, \qquad \omega^2 = \frac{E' k^2}{\rho} - \frac{\mu^2 k^4}{4\rho^2},$$

A, B, C, F constantes, A et B dépendent des conditions initiales, C et F des conditions aux limites.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

— à l'extrémité encastrée :

$$x = 0, \qquad u = 0,$$

quel que soit t, par suite $F = 0$;

— à l'extrémité libre qui supporte la bobine de masse M :

$$S \left[E' \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

S étant la section de l'éprouvette.

Écrivons que le mode vérifie cette condition

$$S\dot{X}_x [E'q + \mu \dot{q}_t] = -MX\ddot{q}_{tt}.$$

Cette équation s'écrit, compte tenu de (2) :

$$\rho \dot{X}_x = \frac{M}{S} k^2 X \qquad \text{pour} \qquad x = l,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{m}{M} \frac{1}{\beta} = \operatorname{tg} \beta \qquad \text{avec} \qquad \beta = kl.$$

L'équation (3) est l'équation aux fréquences. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i \ldots$ ses racines (i entier positif), $k_i\, l = \beta_i$.

Toute fonction de la forme

$$u_i = \sin \frac{\beta_i x}{l}\, e^{-a_i t} \left[A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t \right]$$

satisfait à l'équation de propagation et aux conditions aux limites.

La fonction $\sin \frac{\beta_i\, x}{l}$ est la fonction normale ou forme propre normalisée du mode d'ordre i.

Le mouvement correspondant est une vibration libre amortie. Pour un mode de rang élevé ω_i est imaginaire et le mouvement est apériodique amorti. Précisons dès maintenant que cette dernière particularité ne se présentera pas avec le moule finalement choisi.

L'expression générale d'une vibration libre est $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$; nous utiliserons également l'écriture :

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{\beta_i\, x}{l}\, e^{-a_i t} \left[\mathcal{A}_i\, e^{-b_i t} + \mathcal{B}_i\, e^{+b_i t} \right],$$

où $$b_i^2 = -\omega_i^2.$$

1,2 **Vibrations forcées.**

Pour déterminer la réponse forcée, nous utiliserons les coordonnées généralisées. Cherchons une solution de la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} q_i\,(t) \sin \frac{\beta_i x}{l},$$

les $q_i\,(t)$ étant à déterminer.

Calculons l'énergie potentielle V des forces d'élasticité. Le travail élémentaire de ces forces s'écrit :

$$d\mathcal{C} = \left[\int_0^l \mathrm{SE}' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx \right] dt - \left[\left(\mathrm{SE}' \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} - \left(\mathrm{SE}' \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=0} \right] dt$$

ou, en utilisant une intégration par parties,

$$d\mathcal{C} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^l \mathrm{SE}' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt,$$

$$\mathrm{V} - \frac{\mathrm{SE}'}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx,$$

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{SE}'}{4l} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2\, q_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i} \right).$$

L'énergie cinétique, somme de l'énergie cinétique de l'éprouvette et de la masse M, a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} S\rho \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{x=l},$$

d'où :

$$T = \frac{S\rho l}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right).$$

Pour tenir compte de la perte d'énergie due à l'amortissement interne, nous introduirons une fonction de dissipation D dans les équations de Lagrange du mouvement de l'éprouvette :

$$D = \frac{S}{2} \int_0^l \mu\, \dot{\varepsilon}^2\, dx,$$

$$D = \frac{1}{4} \frac{S\mu}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2\, \dot{q}_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right).$$

Désignons par $Sf_0 \cos \Omega t$ la force excitatrice appliquée à la masse M.

L'équation de Lagrange d'ordre i s'écrit :

$$\rho \ddot{q}_i + \mu k_i^2 \dot{q}_i + E' k_i^2 q_i = \frac{4 f_0}{l} \frac{\beta_i \sin \beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \cos \Omega t.$$

Chaque $q_i(t)$ se compose :

— de la solution générale de l'équation sans second membre. Elle correspond à une vibration libre amortie qui n'est autre que la solution précédemment indiquée :

$$r_i(t) = e^{-a_i t} \left[\mathcal{A}_i\, e^{-b_i t} + \mathcal{B}_i\, e^{b_i t}\right];$$

— d'une solution particulière de l'équation complète. C'est la vibration forcée :

$$s_i(t) = S_i \cos(\Omega t - \psi_i)$$

avec :

$$S_i = \frac{4 f_0 \beta_i \sin \beta_i}{l(2\beta_i + \sin 2\beta_i)} \left[(\rho\Omega^2 - E' k_i^2)^2 + \mu^2 k_i^4 \Omega^2\right]^{-1/2}$$

et :

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{\mu k_i^2 \Omega}{E' k_i^2 - \rho\Omega^2}.$$

La solution la plus générale s'écrit $u = \sum_i u_i$ avec :

$$u_i = \left[s_i(t) + r_i(t)\right] \sin \frac{\beta_i x}{l}.$$

Précisons cette solution dans le cas suivant : la force excitatrice est appliquée, à l'instant $t = 0$, alors que l'éprouvette est au repos. A $t = 0$, nous devons avoir :

$$\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \equiv 0,$$

$$\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \equiv 0;$$

il suffit (1) pour cela que tous les coefficients de ces séries soient nuls (les deux séries sont étudiées au § 1,3). Ce qui donne :

$$\left[r_i(t) + s_i(t)\right]_{t=0} = 0,$$

$$\left[\frac{dr_i}{dt} + \frac{ds_i}{dt}\right]_{t\ 0} = 0;$$

d'où :

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{2}\left[\frac{a_i - b_i}{b_i}\, s_i + \frac{1}{b_i}\frac{ds_i}{dt}\right]_{t\ 0},$$

$$\mathcal{B}_i = -\frac{1}{2}\left[\frac{a_i + b_i}{b_i}\, s_i + \frac{1}{b_i}\frac{ds_i}{dt}\right]_{t\ 0}.$$

1,3 **Existence et unicité de la solution.**

L'existence sera acquise si, pour $0 \leqslant x \leqslant l$ et $t \geqslant 0$, les calculs précédents peuvent être effectués (nous n'avons pas pu justifier toutes les opérations). L'unicité résulterait alors du fait que les équations de Lagrange écrites forment un système de Cauchy.

a) *Convergence de la série* $\sum_i u_i\,(x, t)$.

On a : $$|u_i\,(x, t)| \leqslant |r_i(t)| + |s_i(t)|.$$

Or, $|s_i\,(t)\,| \leqslant |\mathrm{S}_i|$ et d'après l'équation aux fréquences,

$$\beta_i = (i - 1)\,\pi + \xi_i,\ 0 < \xi_i < \frac{\pi}{2};$$

par suite $|\mathrm{S}_i|$ est majoré par $\overline{\mathrm{S}}_i$ équivalent au terme général, indépendant de x et t, d'une série de Riemann en $\frac{1}{i^3}$:

$$\overline{\mathrm{S}}_i \sim \frac{2\, f_0\, lm}{\mathrm{M}\,(\mathrm{E}'^2 + \mu^2\Omega^2)^{1/2}}\,\frac{1}{(i - 1)^3\,\pi^3}.$$

---

(1) L'orthogonalité des cos $\frac{\beta_i x}{l}$ sur $[0, l]$ permettrait de montrer que la condition est nécessaire, ce qui résulterait par ailleurs de l'unicité de la solution.

Étudions $r_i(t)$; $|r_i(t)| < |\mathcal{A}_i| + |\mathcal{B}_i|$ et lorsque $i \to \infty$, $(a_i - b_i) \to \frac{E'}{\mu}$ et $(a_i + b_i) \sim \frac{\mu}{\rho l^2} \beta_i^2$; la partie principale d'un majorant de $|\mathcal{A}_i| + |\mathcal{B}_i|$ est en $\frac{1}{i^3}$.

La série $\sum_i u_i(x, t)$ converge absolument et uniformément en x et t.

b) *Le calcul de l'énergie cinétique exige l'intégration de* $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ *en* x *et de* 0 à l.

Une majoration de $\left|\frac{dr_i}{dt}\right| + \left|\frac{ds_i}{dt}\right|$ par le terme général d'une série numérique convergente permet d'établir que $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t}$.

On a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum w_i \qquad \text{avec} \qquad |w_i| < \mathrm{V} v_i$$

où V est la somme de la série numérique $\sum_j v_j$ majorant $\sum_j \left|\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|$; par suite, la série de terme général w_i est uniformément convergente en x sur $[0, l]$; c'est, de plus, une série de fonctions continues en x, elle peut donc être intégrée en x et de 0 à l.

c) Le calcul de l'énergie potentielle nécessite l'intégration de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ en x et de 0 à l.

Une majoration de $|\beta_i [r_i(t) + s_i(t)]|$ conduit au résultat, d'une manière analogue à ce qui a été fait au *b*).

d) L'expression de la fonction de dissipation fait intervenir l'intégrale de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2$ en x et de 0 à l.

Une majoration de $\left|\beta_i \left(\frac{dr_i}{dt} + \frac{ds_i}{dt}\right)\right|$ permet de légitimer les calculs comme au *b*).

e) Il conviendrait enfin de justifier les dérivations et intégrations qui figurent dans les expressions des travaux élémentaires des forces d'élasticité et d'amortissement. Il ne nous a pas été possible de montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ pouvaient être obtenus par dérivation de séries terme à terme.

1,4 **Remarques.**

a) A partir des fonctions normales, il est possible d'obtenir une répartition statique uniforme des extensions.

$$u(x) = \varepsilon_0 x = \sum_i \mathrm{H}_i \sin \frac{\beta_i x}{l}.$$

Les H_i sont déterminés [57] en multipliant les deux membres par $\sin \frac{\beta_i x}{l}$ et en intégrant entre 0 et l :

$$H_i = \frac{4 \varepsilon_0 l \sin \beta_i}{\beta_i (2 \beta_i + \sin 2 \beta_i)}.$$

Le calcul est légitime car $u(x)$ est uniformément convergente en x sur $[0, l]$: elle est majorée par la série de terme général $\frac{2 \varepsilon_0 l}{(i-1)^3}$.

La série $\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x}$ est uniformément convergente sur $[0, l]$. Elle est majorée par la série de terme général $\frac{2 \varepsilon_0 lm}{M} \frac{1}{(i-1)^2}$. Par suite, en dérivant l'expression de $u(x)$, il vient pour $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$\sum_i \frac{4 \sin \beta_i}{2 \beta_i + \sin 2 \beta_i} \cos \frac{\beta_i x}{l} = 1.$$

b) Il est bien connu que, pour $\Omega \ll \Omega_1$, l'extension est uniforme le long de l'éprouvette. Retrouvons ce résultat.

Nous avons : $$\operatorname{tg} \psi_i \simeq \psi_i \simeq \frac{\mu \Omega}{E'},$$

$$s_i(t) \simeq \frac{4 l \sin \beta_i}{\beta_i (2 \beta_i + \sin 2 \beta_i)} \frac{f_0}{E'} \cos \left(\Omega t - \frac{\mu \Omega}{E'} \right),$$

$$u(x, t) \simeq \frac{f_0}{E'} \left[\sum_i \frac{4 l \sin \beta_i}{\beta_i (2 \beta_i + \sin 2 \beta_i)} \sin \frac{\beta_i x}{l} \right] \cos \left(\Omega t - \frac{\mu \Omega}{E'} \right),$$

compte tenu des résultats ci-dessus :

$$u(x, t) \simeq \frac{f_0 x}{E'} \cos \left(\Omega t - \frac{\mu \Omega}{E'} \right).$$

c) Il est intéressant de constater que la condition à l'extrémité libre (satisfaite implicitement en écrivant les équations de Lagrange) n'est vérifiée qu'en prenant tous les termes de la série.

Le mouvement de la masse M satisfait à l'équation :

$$S \left[\frac{E' \partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} + M \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{x=l} = f_0 S \cos \Omega t.$$

Avec $u_i = \sin \frac{\beta_i x}{l} q_i(t)$, il vient :

$$\sum \frac{l}{\beta_i} \cos \beta_i \left[E' q_i \frac{\beta_i^2}{l^2} + \mu \frac{\beta_i^2}{l^2} \dot{q}_i + \rho \ddot{q}_i \right] = f_0 \cos \Omega t.$$

Compte tenu de la valeur de l'expression entre crochets (équations de LAGRANGE) nous avons :

$$\cos \Omega t \left[\sum_i \frac{4 f_0 \sin \beta_i \cos \beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \right] = f_0 \cos \Omega t.$$

D'après une relation établie au paragraphe *a*), cette égalité est satisfaite.

1,5 **Étude de la réponse forcée.**

Étudions, lorsque le régime est stationnaire, le premier terme de la série. Nous noterons :

$$u_1 (x, t) = u_m \cos (\Omega t - \psi_1) \qquad \text{avec} \qquad u_m = S_1 \sin \frac{\beta_1 x}{l}.$$

Nous écrirons u_m et tg ψ_1 sous la forme suivante :

$$u_m = \frac{4 l f_0}{E'} \frac{\sin \beta_1}{\beta_1 (2\beta_1 + \sin 2\beta_1)} \frac{\sin \beta_1 \dfrac{x}{l}}{\left[\left| 1 - \dfrac{\Omega^2}{\Omega_{\psi_1}^2} \right|^2 + \dfrac{\mu^2 \Omega_{\psi_1}^2}{E'^2} \dfrac{\Omega^2}{\Omega_{\psi_1}^2} \right]^{1/2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\mu \Omega}{E'} \frac{1}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\Omega_{\psi_1}^2}} \qquad \text{avec} \qquad \Omega_{\psi_1}^2 = \frac{E' \beta_1^2}{\rho l^2},$$

Ω_{ψ_1} est la pulsation de résonance de phase.

Il est à remarquer que l'amplitude du déplacement est fonction de f_0, Ω, x. Si besoin est, nous particulariserons par $u_m (x, \Omega)$ l'amplitude pour un x et un Ω donnés.

Introduisons l'angle d'amortissement $\alpha = \dfrac{a_1}{\Omega_{\psi_1}}$. Il a encore pour expression :

$$\alpha = \frac{\mu \Omega_{\psi_1}}{2E'}.$$

La pulsation de résonance d'amplitude Ω_1 a pour expression :

$$\Omega_1^2 = \Omega_{\psi_1}^2 [1 - 2\alpha^2].$$

La réponse forcée est identique à celle d'un système linéaire amorti à un degré de liberté. Nous avons les propriétés classiques :

— proportionnalité de l'amplitude de la réponse à l'amplitude de l'excitation;

— pulsations Ω_{ψ_1} et Ω_1 indépendantes de l'amplitude d'excitation;

— courbe de résonance symétrique par rapport à l'axe $\Omega = \Omega_1$ pour $\left| \dfrac{\Delta\Omega}{\Omega_1} \right| \ll 1$.

Le décrément $a_1 = \dfrac{\mu k_1^2}{2\rho}$ se déduit de la bande passante à mi-hauteur par $a_1 \simeq \dfrac{|\Delta\Omega|}{\sqrt{3}}$.

L'amplitude du déplacement, à la résonance d'amplitude :

$$u_m (x, \Omega_1) = \frac{2 f_0}{\rho l} \frac{\beta_1 \sin \beta_1 \sin \beta_1 \dfrac{x}{l}}{(2\beta_1 + \sin 2\beta_1) \Omega_{\psi_1}^2 \alpha (1 - \alpha^2)^{1/2}} \qquad (1)$$

est extrémale pour $x = l$. L'amplitude ε_m de l'extension est extrémale pour $x = 0$.

D'après le moule, la contrainte $\sigma_1(x, t)$ correspondant à $u_1(x, t)$ a pour expression :

$$\sigma_1(x, t) = \sigma_m \cos(\Omega t - \Phi_1)$$

avec :

$$\sigma_m = \varepsilon_m E' \left[1 + \frac{\mu^2 \Omega^2}{E'^2}\right]^{1/2}$$

et :

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \Phi_1) = \frac{\mu\Omega}{E'}.$$

$\psi_1 - \Phi_1 = \theta$ est l'angle de perte.

Par suite, Φ_1 est donné par :

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{2\alpha\Omega^3}{\Omega_{\psi_1}[\Omega^2_{\psi_1} - \Omega^2(1 - 4\alpha^2)]}.$$

La résonance de phase de contrainte Ω_{Φ_1} a lieu pour :

$$\Omega^2_{\Phi_1} = \Omega^2_{\psi_1}[1 - 4\alpha^2]^{-1}. \tag{2}$$

Cherchons maintenant, pour $x = l$, une expression approchée de la réponse de l'éprouvette à une pulsation voisine de Ω_{ψ_1}. Nous pourrons prendre $u_1(l, t)$ si, et seulement si, la contribution des autres harmoniques est négligeable.

Écrivons : $$u(l, t) = u_1(l, t) + u_R(l, t)$$

avec $$u_R(l, t) = \sum_{i\ 2}^{\infty} u_i(l, t).$$

Chaque terme de $u_R(l, t)$ est majoré en valeur absolue par :

$$\frac{l f_0 h_i}{E'} \frac{1}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\Omega^2_{\psi_i}}}$$

avec :

$$h_i = \frac{4 \sin^2 \beta_i}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}.$$

En supposant $\left|\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega\psi_1}\right| < \dfrac{1}{16}$ et M voisin de m ou plus grand que m, on a pour tout $i \geqslant 2$, $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\Omega^2_{\psi_i}}} < \dfrac{3}{2}$. Compte tenu d'un résultat du [1,4, *a*)], $u_R(l, t)$ est majoré par $\dfrac{3}{2}\dfrac{l f_0}{E'}(1 - h_1)$.

Il s'ensuit que $\left|\dfrac{u_R(l, t)}{u_m(l)}\right|$ est majoré par $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1 - h_1}{h_1}\right) A\left(\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega_{\psi_1}}, \alpha\right)$, avec $A\left(\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega_{\psi_1}}, \alpha\right)$ inférieur à 1 et tendant vers 2α pour $\Delta\Omega \to 0$, par ailleurs $\dfrac{1 - h_1}{h_1} \ll 1$. Ce qui montre (malgré une majoration très large) que $\left|\dfrac{u_R(l, t)}{u_m(l)}\right| \ll 1$ pour Ω voisin de Ω_{ψ_1}.

Il est bien évident que l'erreur relative sur ψ_1 est, au plus, égale à l'erreur relative sur u_m.

Il en résulte que pour $x = l$ et Ω voisin de Ω_{ψ_1}, la réponse forcée de l'éprouvette est représentée par $u_1(l, t)$ et la contrainte par $\sigma_1(l, t)$. Nous admettrons qu'il en est de même pour $0 < x < l$ et nous dirons que l'éprouvette vibre sur son premier mode propre.

2 DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX ET MÉTHODE DE MESURE

La mise en œuvre expérimentale du système étudié précédemment pose les problèmes suivants :

— réalisation des conditions mathématiques aux limites, encastrement de l'éprouvette et fixation de la bobine excitatrice;

— réalisation et mesure de l'excitation;

— mesure de la réponse.

2,1 Réalisation des conditions mathématiques aux limites.

a) Encastrement de l'éprouvette.

Ce premier problème nous a conduit à mettre au point deux types de montage : l'un sur bloc de béton offrant toutes les garanties d'un bon encastrement, mais d'utilisation peu commode; l'autre sur bâti métallique d'un emploi plus facile que le précédent.

α) *Montage sur bloc de béton.*

Le dispositif de fixation de l'éprouvette est constitué par un cylindre de fer, d'axe vertical, soudé à une pièce de même matériau, elle-même scellée dans le bloc de béton. Le cylindre est évidé de manière à former un logement présentant un fond plat horizontal et deux parois planes parallèles et verticales. L'éprouvette est en contact, par le grand côté de sa section droite (rectangulaire), avec l'une de ces parois. Une vis de blocage pénètre normalement au centre de l'autre paroi et permet d'appliquer une forte pression sur toute la largeur de l'éprouvette; ceci par l'intermédiaire d'une cale d'acier de même profondeur que le logement.

Nous considérons que l'encastrement obtenu de cette manière est satisfaisant. En effet, pour la gamme de fréquences expérimentée, aucune vibration du dispositif de fixation n'a été décelée.

β) *Montage sur bâti métallique.*

Un châssis, en fonte, muni de vis calantes, supporte deux colonnes cylindriques fixées normalement à son plan. Ces deux colonnes sont réunies par une plaque à l'extrémité et par trois « traverses ». Comme le montre la *figure* 1, une « traverse » est composée d'une plaque reliant deux « colliers » qu'il est possible de bloquer sur les colonnes à la position désirée. La « traverse » supérieure supporte la tête de fixation de l'éprouvette

(analogue à celle précédemment décrite). Les plaques des deux autres « traverses » sont percées de trous cylindriques laissant le passage de l'éprouvette et du pot d'excitation.

L'ensemble ainsi constitué présente, suivant son axe, une grande raideur en

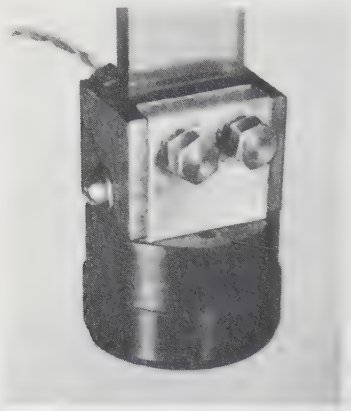
Fig. 1

traction compression. Il s'ensuit que l'encastrement peut être considéré comme satisfaisant lorsque la fréquence de résonance de l'éprouvette est nettement différente d'une fréquence de résonance des supports. Les forces exercées par l'éprouvette ne peuvent alors faire jouer la « traverse » supérieure. La méthode consiste à n'expérimenter que certaines fréquences ou à décaler, dans la mesure du possible, une fréquence parasite du bâti en ajoutant des masses sur la plaque dont nous avons parlé.

b) Fixation de la bobine excitatrice.

Nous avons utilisé deux types de support de bobine.

Le premier est constitué d'un cube de duralumin de côté égal à la plus grande dimension de la section droite de l'éprouvette (voir *fig.* 2 *a*). Ce cube présente une ouverture laissant le passage de l'éprouvette et de deux cales que des vis de blocage permettent de serrer sur l'éprouvette. La bobine excitatrice est solidaire de ce support.



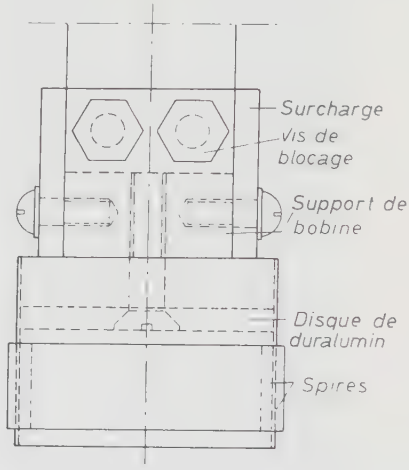
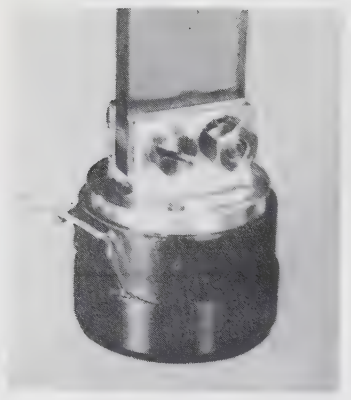


Fig. 2 *a*.



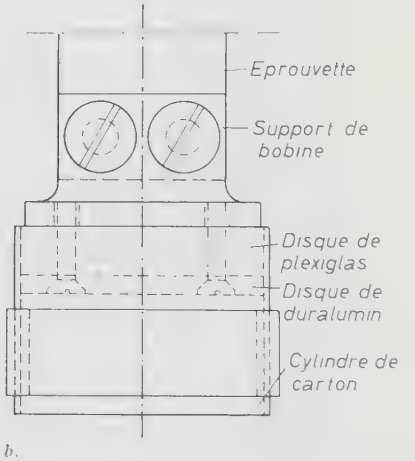


Fig. 2 *b*.
Photographies et schémas de la bobine excitatrice et de ses supports.

Les parties latérales du support permettent de fixer deux surcharges identiques et, ainsi, de ne pas amener le centre de gravité en dehors de l'axe du système. Ce support se prête commodément à l'emploi de la méthode de la fréquence déplacée.

Le deuxième type de support, plus léger, est formé d'un disque — sous lequel est fixée la bobine — surmonté normalement à son plan d'une « mâchoire » serrée fortement sur l'éprouvette par l'intermédiaire de deux ensembles vis-écrous traversant, de part en part, mâchoire et éprouvette. (La *fig.* 2 *b* montre photographie et vue en coupe.)

Ce type de support assure une meilleure liaison de la bobine à l'éprouvette; c'est pourquoi, il a été plus particulièrement utilisé pour les mesures d'amortissement.

2,2 **Réalisation et mesure de l'excitation.**

L'excitation est du type électrodynamique.

La bobine est formée de six couches de spires concentriques : trois d'entre elles sont collées à l'intérieur, les trois autres à l'extérieur d'un cylindre de carton, lui-même collé sur un disque de plexiglas. Elle est liée solidement par ce dernier à l'un des supports décrits précédemment.

L'induction du pot d'excitation est de nature électromagnétique.

Nous ferons les observations suivantes :

— l'entrefer a la forme d'un cylindre d'épaisseur constante. Son axe de révolution coïncide avec celui du pot;

— la bobine est librement mobile dans cet entrefer;

— la tension du courant continu d'alimentation du pot est constante et suffisamment élevée pour saturer le circuit magnétique. Un enroulement, sur le noyau central, a permis de vérifier que le flux d'induction reste constant et est indépendant de l'intensité du courant alternatif parcourant la bobine;

— le déplacement de l'extrémité de l'éprouvette étant faible, toutes les spires restent dans l'entrefer;

— l'axe de révolution du pot coïncide avec l'axe de révolution de la bobine et avec l'axe longitudinal de symétrie de l'éprouvette;

— le courant sinusoïdal d'excitation est fourni par un amplificateur commandé, en amplitude et pulsation, par un générateur basses fréquences. L'amplitude du courant est indépendante, à la fois, de la fréquence d'excitation et du mouvement vibratoire de la bobine dans l'entrefer.

Il résulte de ces considérations que ce mode d'excitation a les propriétés suivantes :

— la force est exercée suivant l'axe de l'éprouvette;

— la force est sinusoïdale comme le courant;

— la force est réglable en amplitude et en fréquence, ces deux paramètres étant indépendants;

— la force est indépendante du mouvement de l'éprouvette;

— les caractéristiques vibratoires du système mécanique ne sont pas modifiées; l'excitation n'ajoute ni raideur ni amortissement (la théorie tient compte de la masse de la bobine);

— un signal, en phase avec la force, s'obtient en prenant la tension aux bornes d'une résistance pure en série dans le circuit d'excitation. La valeur de cette tension permet de connaître l'amplitude du courant d'excitation et, compte tenu d'un étalonnage préalable, l'amplitude de la force excitatrice.

Indiquons le principe d'étalonnage de la bobine excitatrice.

Le dispositif suivant a été réalisé. Un levier rigide, rectiligne, mobile par une de ses extrémités autour d'un axe horizontal, vient en contact, en position horizontale, avec la face supérieure d'un petit cylindre dont la face inférieure appuie sur un montage à quartz piézo-électrique. La tension délivrée par le quartz (par l'ensemble quartz-lampe électromètre) est proportionnelle à la force appliquée verticalement à l'extrémité libre du levier.

Une première manipulation consiste à suspendre des poids connus à l'extrémité libre du levier. La courbe (*fig.* 3) donne la tension en fonction de la charge.

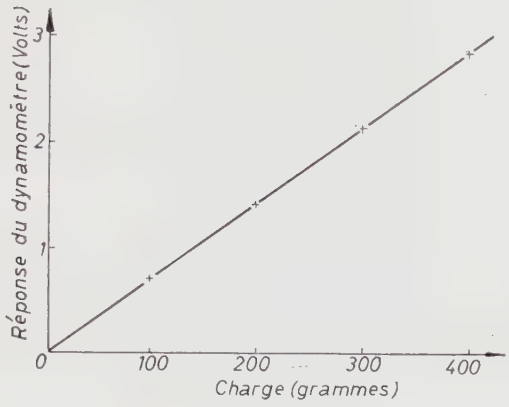


Fig. 3.

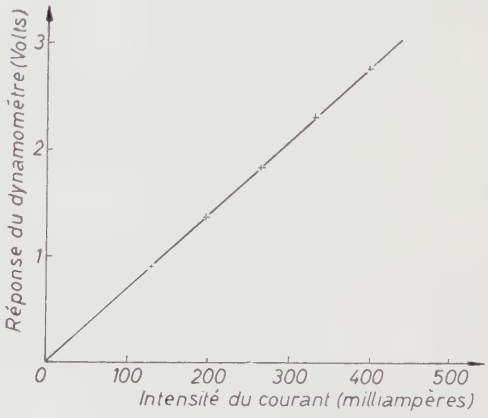


Fig. 4.

Dans une manipulation suivante, la bobine, fixée au levier (son axe, vertical, passe par le point d'attache des poids), placée dans l'entrefer du pot, est parcourue par un courant continu. La courbe (*fig.* 4) donne la tension en fonction du courant.

Ces courbes montrent que la force exercée par la bobine est bien proportionnelle au courant; elles permettent l'étalonnage; un courant de 100 mA produit une force de 97 000 dynes à 3 % près.

2,3 **Mesure de la réponse.**

La réponse de l'éprouvette a été étudiée sous deux formes : l'extension et le déplacement de l'extrémité libre.

a) Mesure de l'extension.

L'extension, au niveau d'une section d'abscisse x, est mesurée à l'aide de deux extensomètres à fils résistants collés à ce niveau, sur les grandes faces de l'éprouvette, parallèlement à son grand axe. Ces extensomètres sont disposés soit face à face, soit décalés symétriquement par rapport à l'axe, de manière à permettre entre eux l'observation photoélastique. Ces deux dispositions des extensomètres sont visibles sur la *figure* 1.

L'utilisation de deux jauges actives permet d'éliminer un effet parasite de flexion. Deux jauges témoins assurent la compensation thermique.

Cette méthode de mesure suppose que le fil résistant de la jauge suit les déformations du matériau sous-jacent. Si R est la résistance du fil, ΔR, sa variation, le rapport $\frac{\Delta R}{R}$ est transformé, par un pont d'extensométrie dynamique, en une variation proportionnelle de tension. L'étalonnage de cette tension, en $\frac{\Delta R}{R}$, est possible en produisant un déséquilibre du pont par un $\frac{\Delta R}{R}$ connu. Le coefficient de jauge donné par le constructeur (quotient de $\frac{\Delta R}{R}$ par la variation relative de longueur du fil résistant) devrait permettre la mesure de l'amplitude de l'extension; (nous verrons, par la suite, que l'emploi des extensomètres ne s'y prête pas, pour le matériau étudié).

La phase de l'extension (sinusoïdale) ne peut pas être connue par suite du déphasage important, croissant avec la fréquence, introduit par le pont d'extensométrie.

Par contre, le déphasage entre deux extensions peut être déterminé. Il suffit de s'assurer, au préalable, que les deux voies du pont d'extensométrie employées introduisent un même déphasage. A cette fin, ces deux voies sont utilisées chacune avec une seule jauge active captant le même phénomène, par exemple, l'extension sur deux faces opposées de l'éprouvette. Un condensateur variable en parallèle sur chaque voie permet d'éliminer le « bruit de fond » du signal et éventuellement, le déphasage entre les deux voies (à 1 /300^{e} de radian).

b) Mesure du déplacement de l'extrémité libre.

Le dispositif suivant a été réalisé.

Une lame A peut être déplacée, à l'aide d'une vis micrométrique, parallèlement à l'axe de l'éprouvette. Une lame B est solidaire du support de la bobine excitatrice. Ces deux lames, situées dans le plan médian de l'éprouvette, ménagent entre elles une fente horizontale à côtés parallèles. Un système optique forme dans le plan des lames, au voisinage de l'éprouvette, l'image verticale du filament rectiligne d'une lampe à éclairement constant. L'axe du système optique est horizontal et rencontre perpendiculairement la fente. La lumière traversant cette dernière est reçue sur un photomultiplicateur.

On sait que cet appareil permet d'obtenir une tension proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue. Il est alors nécessaire, pour notre étude, d'établir une relation entre tension et variation de largeur de la fente.

La lame B est décalée, de manière à agrandir la fente, à partir de sa position initiale d'équilibre, d'une distance *d* supérieure à l'amplitude maximale admissible pour B au cours de la vibration (*fig.* 5). La lame A d'abord amenée au voisinage de B est ensuite écartée progressivement, à l'aide de la vis micrométrique, d'une distance égale à 2 *d*. L'expérience montre que la variation de tension est proportionnelle à ce déplacement.

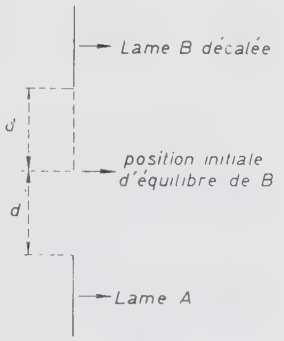


Fig. 5.

Il s'ensuit que (la lame B occupant sa position initiale d'équilibre) tout déplacement sinusoïdal de B module sinusoïdalement la tension fournie. La valeur efficace de cette tension permet, compte tenu de l'étalonnage précédent, la mesure de l'amplitude de vibration.

Il convient toutefois, pour des mesures précises, qu'un intervalle de temps assez court sépare l'étalonnage et la mesure quantitative. Ceci afin d'éviter tout risque d'erreur dû au phénomène de fatigue du photomultiplicateur. Pour un éclairement constant, un courant plaque de l'ordre de 10 μA décroît linéairement avec le temps

$$\frac{1}{i}\frac{di}{dt} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ mn}^{-1}.$$

Remarque. — Pour un autre étalonnage, il n'est pas nécessaire de décaler la lame B. Il est, en effet, admissible de supposer que l'intensité lumineuse du filament est encore uniforme le long de la partie utile de l'image du filament, comme l'indique le premier étalonnage.

Soulignons que ce dispositif se prête, avec une bonne précision, non seulement à la mesure de l'amplitude, mais aussi à celle de la phase $u\,(l,\,t)$. La tension fournie n'est que légèrement déphasée par rapport au signal réel (par suite de la présence de capacités parasites). Ce déphasage, croissant avec la fréquence, peut être négligé aux fréquences considérées (il est de l'ordre du grade à 1 000 Hz avec une résistance de charge d'environ 180 000 Ω).

3 DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

A la résonance et au voisinage, l'expérience montre que l'extension ε et le déplacement $u\,(l,\,t)$ sont sinusoïdaux. L'analyse des signaux obtenus indique un léger taux de distorsion, de l'ordre de 1 %, strictement dû aux appareils de mesure (porteuse du pont d'extensométrie, « bruit de fond » du photomultiplicateur).

Par ailleurs, les extensions, prises en deux points de l'éprouvette, sont en phase. Ceci montre que la contribution des harmoniques est négligeable; la représentation de l'éprouvette par son premier mode est donc justifiée.

3,1 Coefficient d'élasticité.

Nous supposons que l'angle d'amortissement est petit, la pulsation à la résonance d'amplitude a alors pour expression :

$$\Omega_1^2 \simeq \frac{E' \beta_1^2}{\rho l^2}.$$

Au cours du mouvement du système, les déformations longitudinales qui entrent en jeu restent faibles. En supposant la section constante, la variation de volume qui en résulte pour le matériau est inférieure au millième du volume initial. Nous considérons, dans le cadre de notre schématisation, que la masse spécifique reste constante. La relation précédente permet de connaître le coefficient d'élasticité E', β_1 étant donné par l'équation aux fréquences en fonction du rapport $\frac{m}{M}$. Précisons que la masse M

comprend la masse de la bobine, la masse du support et celle de la partie de l'éprouvette serrée par ce dernier, m et l désignent la masse et la longueur de la partie de l'éprouvette susceptible d'entrer en vibrations.

L'expérience montre que la fréquence de résonance est indépendante de l'amplitude, pour une éprouvette de longueur donnée et une valeur donnée du rapport $\frac{m}{M}$. *Le coefficient E' est donc indépendant de l'amplitude.*

En faisant varier M, avec des surcharges, on déplace nettement la fréquence de résonance, pour une même éprouvette. Nous constatons que E' est constant à 1 % près. Le tableau ci-dessous donne les résultats pour une éprouvette de longueur utile $l = 33$ cm et de masse $m = 40{,}90$ g.

M (g)	101,4	83,7	71,86	57,17	51,2	37,2
β_1.....	0,5954	0,6472	0,6894	0,7578	0,7978	0,8904
N_1 (Hz).....	464	504	535	592	618	700
E' (Kg/mm²).....	327	321	322	322	323	326

Par ailleurs, une gamme de fréquences de 450 à 1 200 Hz environ a été expérimentée en utilisant des éprouvettes de différentes longueurs et, éventuellement, des surcharges. Le coefficient E' a encore été trouvé constant à 1 % près. Donnons quelques résultats.

N_1 (Hz).....	490	860	957	1190
E' (kg/mm²).....	323	325	323	327

L'écart de 1 % observé sur E' peut être attribué aux erreurs de mesure et aux variations de température ambiante.

Le coefficient E' est donc indépendant de la fréquence.

Signalons que Sutton [56] a trouvé une variation avec la fréquence, mais en opérant à des fréquences nettement plus grandes et pour une gamme plus étendue.

Il convient de préciser que les valeurs données ont été obtenues au cours d'essais de vibrations de courte durée, à une température ambiante de 23° environ.

Les éprouvettes utilisées ont toutes la même épaisseur. Dans les expériences précédentes le rapport largeur sur longueur est sensiblement constant (1 /17e).

Avec des éprouvettes de même longueur et de largeurs différentes, mais comprises entre le 1 /10e et le 1 /25e de la longueur, nous avons vérifié que la raideur est indépendante de la section. Signalons que ce résultat a été obtenu avec des tiges métalliques [24].

Le coefficient d'élasticité apparaît donc comme une caractéristique intrinsèque du matériau, à la fois indépendante, dans les limites indiquées, de la géométrie du matériau, de l'amplitude et de la pulsation de l'excitation.

3,2 **Coefficient de viscosité.**

L'expérience montre que, à la résonance ou au voisinage, l'amplitude de la réponse est proportionnelle à l'amplitude de l'excitation. A titre d'exemple, la *figure* 6 donne, à la résonance, ε_m en un point et u_m (l) en fonction de l'amplitude de l'excitation, pour une éprouvette donnée ($l = 33$ cm, $S = 1$ cm², $m = 40{,}90$ g, $M = 39{,}70$ g). Ces

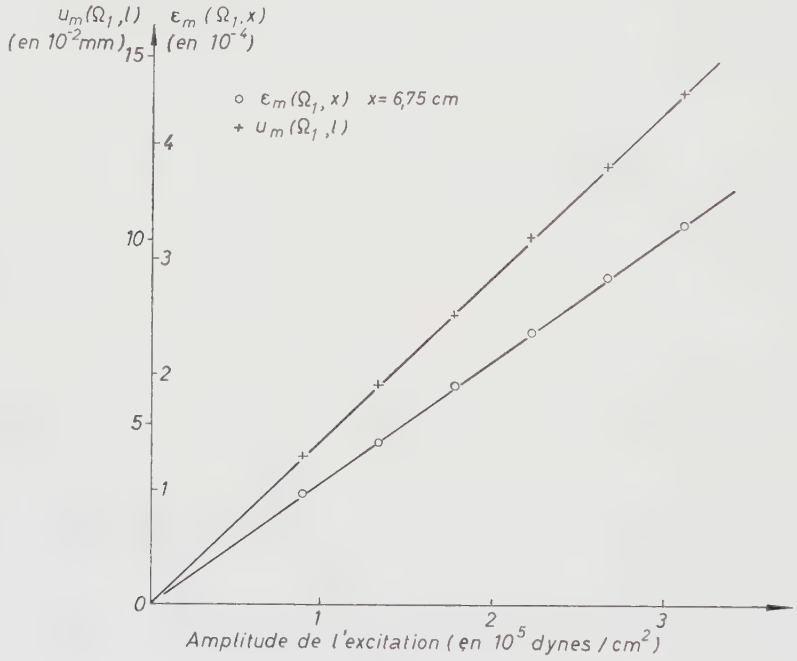


Fig. 6.

résultats montrent, d'après la relation (1) § 1,5, que *le coefficient de viscosité est indépendant de l'amplitude de l'excitation.*

Pour une amplitude d'excitation fixée, les courbes de résonance, donnant ε_m et u_m (l), en fonction de la fréquence d'excitation, sont superposables après une affinité convenable. Ces courbes sont symétriques par rapport à l'axe $N = N_1$ pour $\frac{\Delta N}{N_1} \ll 1$. La *figure* 7 indique les résultats obtenus avec la même éprouvette et la même masse M (pour une amplitude d'excitation $f_0 S = 34{,}4 \times 10^3$ dynes).

Le décrément est obtenu par la méthode de la bande passante à mi-hauteur. L'angle d'amortissement a pour valeur :

$$\alpha \simeq \frac{\Delta N}{\sqrt{3}\, N_1}.$$

Afin d'obtenir une meilleure précision, nous mesurons, à l'aide d'un chronomètre électronique, les périodes de l'excitation. Le tableau ci-dessous indique, pour

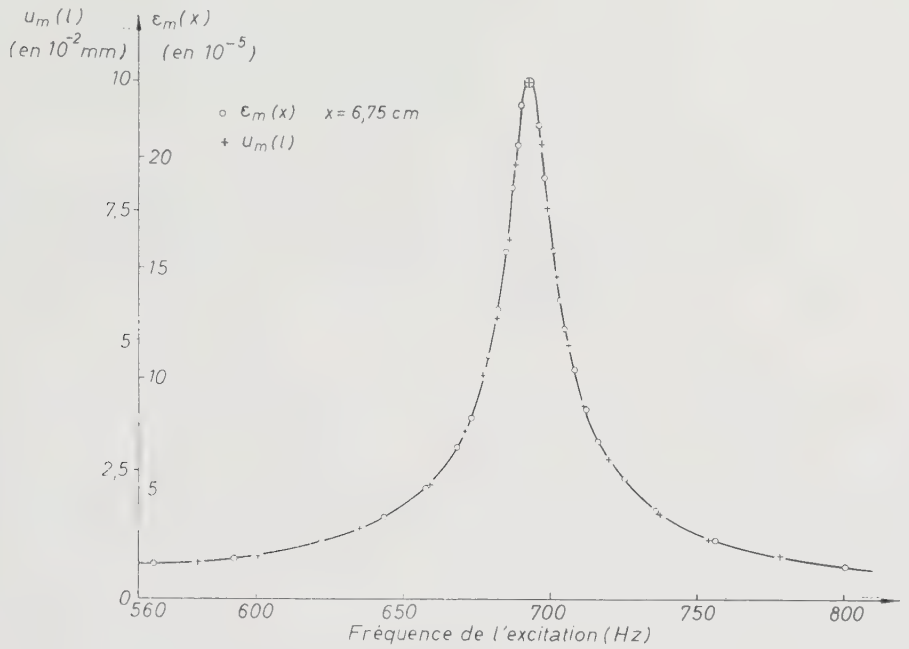


Fig. 7.

des amplitudes d'excitation croissantes, les périodes T_1, T_{12} et T_{13} pour lesquelles la réponse ε_m est extrémale et moitié de sa valeur extrémale. La manipulation ne dure que 2 mn environ.

	f_0 S dynes $\times 10^{-3}$					
	11	21,5	28,8	37,1	50,8	58,4
T_1	14 271	14 271	14 278	14 281	14 286	14 292
T_{12}.....	14 015	14 018	14 020	14 022	14 029	14 036
T_{13}.....	14 529	14 528	14 533	14 538	14 545	14 551
$T_{13} - T_{12}$.....	514	510	513	516	516	515

Les périodes sont appréciées à 4×10^{-7} s près. La croissance des différentes périodes est négligeable (elle est due à l'échauffement du matériau). $2\,\Delta N$ est alors proportionnel à $T_{13} - T_{12}$.

La bande passante est donc indépendante de l'amplitude de l'excitation. Ce qui confirme le résultat énoncé plus haut.

Nous avons constaté que la *bande passante* (calculée à partir des mesures de périodes) *est proportionnelle à la fréquence de résonance pour toute la gamme des fréquences* expérimentées et pour une même température ambiante. La *figure* 8 l'indique nettement. La concordance est excellente entre les résultats obtenus avec les deux types d'encastrements.

D'autre part, nous avons constaté que le coefficient de proportionnalité entre bande passante et fréquence est indépendant de la largeur de l'éprouvette.

L'angle d'amortissement apparaît comme une caractéristique intrinsèque du matériau, à la fois indépendante, dans les limites indiquées, de la géométrie de l'éprouvette, de l'amplitude et de la pulsation de l'excitation. Ce qui vérifie l'hypothèse de Rayleigh. Nous trouvons $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-2}$ à 2 % près, pour une température ambiante de 22°.

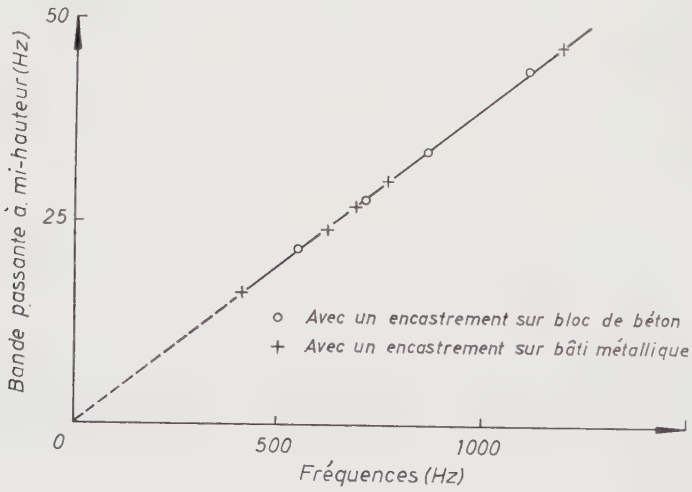


Fig. 8.

Notons que d'autres auteurs ont trouvé, soit une variation avec l'amplitude [52], [60], soit avec la fréquence [56], mais en opérant à des amplitudes et des fréquences nettement plus grandes.

L'angle d'amortissement étant constant ainsi que E′ :

$$\mu = \frac{2\alpha E'}{\Omega_1}.$$

Il s'ensuit que *le coefficient de viscosité est inversement proportionnel à la fréquence.*

A notre connaissance, cette loi de variation n'avait pas été établie pour les fréquences de résonance.

3,3 **Influence de la température sur les caractéristiques mécaniques.**

a) Température ambiante.

Nous avons effectué les mesures de périodes T_1, T_{12} et T_{13} à des températures ambiantes différentes. La durée de chaque essai est de 20 s environ. Les températures

de 22° à 29°5 sont obtenues en chauffant progressivement la salle. Cet échauffement lent permet d'espérer que l'éprouvette a atteint la température indiquée par un thermomètre placé à son voisinage.

Les résultats sont donnés *figures* 9 et 10. La variation de l'angle d'amortissement est plus importante que celle du coefficient d'élasticité.

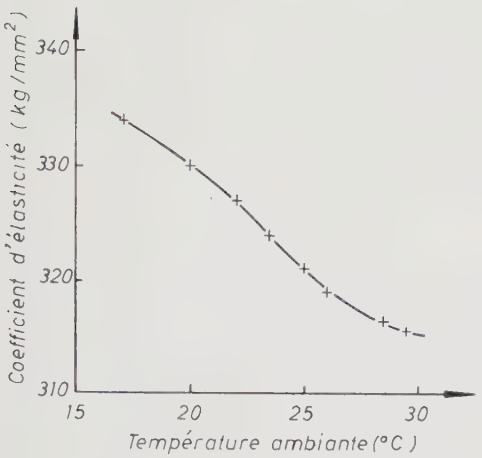


Fig. 9.

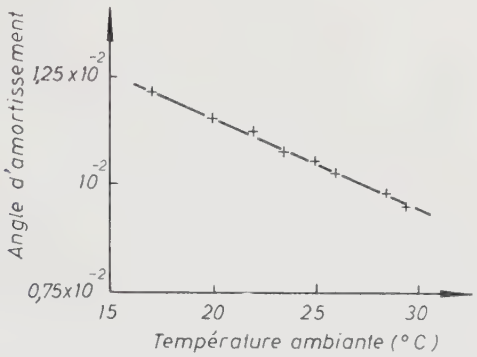


Fig. 10.

b) Échauffement dû a la vibration.

L'éprouvette est excitée à la résonance, l'amplitude d'excitation maintenue constante. La température ambiante ne varie pas au cours de l'essai. Les mesures de périodes T_1, T_{12} et T_{13} sont effectuées à des intervalles de temps déterminés. Après chaque manipulation, la pulsation de l'excitation est réglée à la résonance.

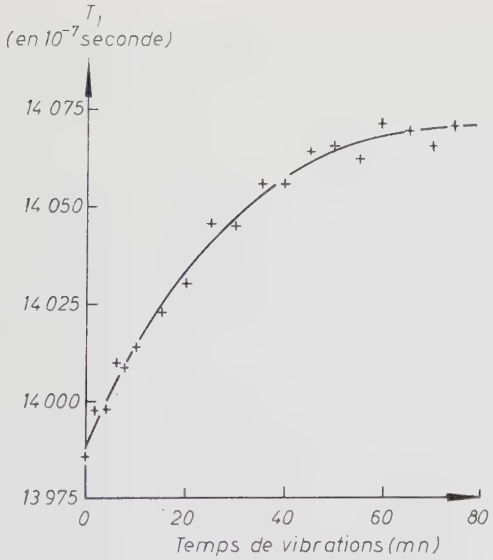


Fig. 11.
(T_1 est la période de résonance d'amplitude)

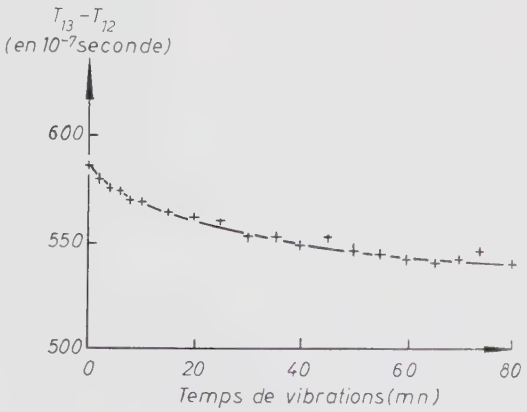


Fig. 12.
(T_{13} et T_{12} sont les périodes de l'excitation pour lesquelles la réponse est moitié de sa valeur à la résonance d'amplitude)

Nous avons toujours constaté une légère croissance de T_1 et une décroissance plus importante de $T_{13} - T_{12}$. Les *figures* 11 et 12 indiquent ces variations pour une éprouvette de 33 cm à une température ambiante de 17° (T_1 croît de 0,5 % alors que $T_{13} - T_{12}$ décroît de 10 %). Coefficient d'élasticité et angle d'amortissement décroissent avec le temps de vibration et tendent vers des valeurs limites au bout d'un temps plus ou moins long (lorsqu'un équilibre thermique est atteint). Il semble que la décroissance de l'amortissement est moins sensible lorsque la température ambiante est plus élevée. Nous n'avons pas fait une étude approfondie de ces variations qui dépendent de la température ambiante, de l'amplitude et de la pulsation de l'excitation. Néanmoins, nous pouvons affirmer que les caractéristiques mécaniques (coefficient d'élasticité et angle d'amortissement), peuvent être considérées comme constantes au cours d'essais de vibrations dont la durée est limitée à quelques minutes.

4 CHOIX ET QUALITÉ DU MOULE MATHÉMATIQUE

Nous venons de voir, sous certaines réserves, que le coefficient E′ et l'angle d'amortissement α sont des caractéristiques intrinsèques du matériau pour le premier mode de vibration. Le fait que ces valeurs soient indépendantes de la fréquence conduit à supposer qu'il en est de même pour les autres modes de vibration. Nous admettrons ce résultat que nous avons pu vérifier seulement pour E′ et le second mode de vibration.

Avec cette hypothèse, le coefficient de viscosité μ est, pour chaque mode, inversement proportionnel à la fréquence.

Il convient de rappeler que les relations qui nous ont permis de déterminer les caractéristiques mécaniques ont été établies, en supposant ces mêmes caractéristiques constantes, à partir du modèle de Kelvin-Voigt. Il semble alors que la variation du coefficient d'amortissement soit en contradiction avec l'hypothèse.

Nous éviterons cette difficulté en prenant le moule mathématique linéaire suivant :

$$\sigma = E' \sum_i \varepsilon_i + \sum_i \mu_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}.$$

Les ε_i font intervenir les formes propres de vibrations (§ 1,1) et les coordonnées généralisées :

$$\varepsilon_i = \frac{\beta_i}{l} \cos \frac{\beta_i x}{l} q_i (t)$$

et :

$$\mu_i = \mu (\Omega) = \frac{2 \alpha E'}{\Omega_{\psi i}} \qquad (\alpha \text{ constant}).$$

La fonction de dissipation a alors pour expression :

$$D = \frac{1}{4} \frac{S}{l} \sum_i \mu_i \beta_i^2 \dot{q}_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2 \beta_i}{2 \beta_i}\right).$$

On peut faire ici une étude analogue au paragraphe 1 en remplaçant μ par μ_i dans l'équation de LAGRANGE, d'ordre i. On remarque qu'il n'y a pas de composante apériodique amortie.

Au voisinage de la résonance du premier mode, le moule se réduit à :

$$\sigma \simeq E' \varepsilon_1 + \mu_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}.$$

La perte d'énergie relative est alors au voisinage de la résonance :

$$\frac{\Delta W}{W} \simeq 2\pi \frac{\mu_1 \Omega_{\psi_1}}{E'}.$$

Cette perte devient indépendante de la fréquence avec la loi $\mu_1 \Omega_{\psi_1} = C^{te}$. Cette dernière n'est certainement pas valable pour les fréquences basses, le frottement devrait alors tendre vers l'infini.

Le moule mathématique le mieux adapté paraît être celui de KÉPÈS [6]. Il introduit une perte énergétique due à une force de frottement solide et proportionnelle à la valeur absolue de la déformation :

$$\sigma = E' \left[\varepsilon + \pi \alpha |\varepsilon| \operatorname{sig} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right]$$

avec :

$$\operatorname{sig} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = +1 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} > 0;$$

$$\operatorname{sig} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -1 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} < 0;$$

$$\operatorname{sig} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \text{toutes valeurs comprises entre } -1 \text{ et } +1 \quad \text{si} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0.$$

Il fait appel uniquement aux caractéristiques intrinsèques du matériau, coefficient d'élasticité et angle d'amortissement; l'extension étant définie à partir d'un état de repos résultant d'une excitation nulle. Comparons ce moule au précédent : le coefficient d'élasticité est le même et la perte d'énergie par cycle (amplitude ε_m) a la même valeur $2\varepsilon_m^2 \pi\alpha E'$; de plus, celui-là a l'avantage de ne pas présenter, aux fréquences basses, le défaut dont nous avons parlé.

Bien que ce moule paraisse le mieux adapté au matériau, nous utiliserons, avec les réserves indiquées, le moule mathématique linéaire car il est d'un emploi plus commode. Le problème est alors d'apprécier la qualité de ce dernier.

4,1 **Courbe de résonance.**

En régime stationnaire, pour une excitation d'amplitude donnée, l'amplitude de la réponse (extension ou déplacement de l'extrémité libre) est proportionnelle à :

$$Y = \left[\left(1 - \frac{N^2}{N_{\psi_1}^2} \right)^2 + 4\alpha^2 \frac{N^2}{N_{\psi_1}^2} \right]^{-1/2},$$

N_{ψ_1} étant la fréquence de résonance de phase.

La courbe de résonance Y(N) calculée à partir de E′ et α coïncide avec la courbe expérimentale après une affinité orthogonale convenable à partir de l'axe des fréquences (*fig.* 13).

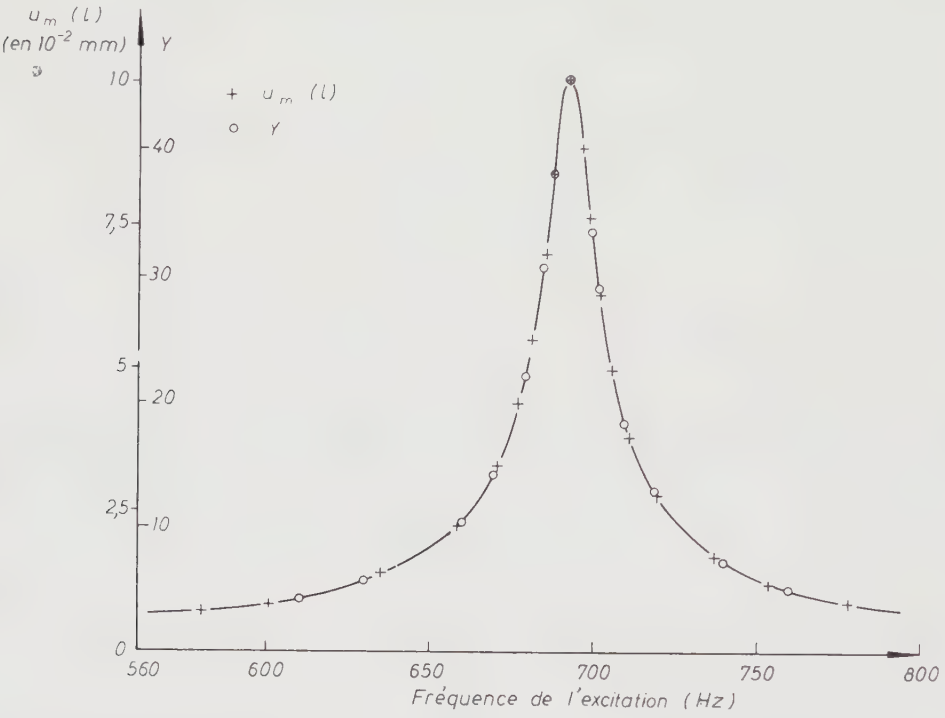


Fig. 13.
(La courbe Y est calculée avec $N\psi_1 = 692$ HZ et $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-2}$)

Remarque. — Ce résultat n'infirme pas une loi éventuelle en $\mu\Omega = \mu_1\Omega_{\psi_1}$ au voisinage de la résonance. En effet, α étant petit, le second terme de l'expression entre crochets est négligeable vis-à-vis du premier dès que l'on s'éloigne de la résonance.

4,2 **Amplitude de la réponse.**

D'après ce qui vient d'être dit, notons que pour ε_m et u_m, il suffit de vérifier, pour une seule fréquence donnée, voisine de la fréquence de résonance, que l'amplitude mesurée a la même valeur que l'amplitude calculée. Nous nous placerons à la résonance d'amplitude.

a) Déplacement $u_m(l)$.

L'amplitude u_m a été mesurée par la méthode exposée plus haut. L'encastrement est réalisé sur bloc de béton. Donnons, à titre d'exemple, le détail d'une manipulation.

La courbe d'étalonnage (*fig.* 14) montre la variation de tension en fonction de la variation de largeur de la fente. (La lame B étant décalée comme il est dit au paragraphe 2,3, *b*), la tension de référence correspond à une ouverture initiale de l'ordre de

5×10^{-2} mm et au fait qu'il existe un peu de lumière ambiante). Après étalonnage, la lame A est réglée de manière à obtenir une réponse de 3,5 V (partie linéaire), la lame B est alors ramenée à une position moyenne jusqu'à obtenir une réponse de 2 V. Tout déplacement de l'extrémité de l'éprouvette, de part et d'autre de sa position d'équilibre, d'une amplitude inférieure ou égale à 35×10^{-2} mm, se traduira par une réponse linéaire du système de mesure.

En régime stationnaire, $u_m(l)$ est proportionnel à f_0 S (*fig.* 6). La mesure dynamique, effectuée immédiatement après étalonnage, pour une éprouvette dont les carac-

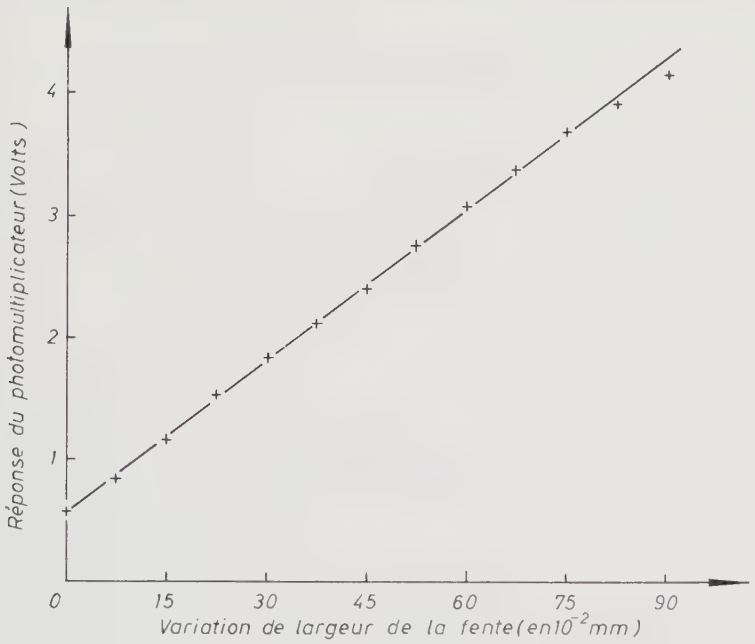


Fig. 14.

téristiques ont été précisées au paragraphe 3,2 avec $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-2}$ et $f_0 S = (45{,}4 \pm 1)\,10^3$ dynes, a fourni : $u_m = (13{,}15 \pm 0{,}50) \cdot 10^{-2}$ mm. La valeur calculée est

$$u_m = (13 \pm 0{,}50) \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

De nombreuses mesures ont été faites, à des fréquences différentes, avec plusieurs éprouvettes. Chaque mesure était accompagnée d'un étalonnage. Dans tous les cas, la valeur calculée diffère de moins de 4 % de la valeur mesurée. A la précision de nos mesures nous pouvons considérer que le déplacement calculé est égal au déplacement mesuré.

b) Extension.

La méthode de mesure utilisant les extensomètres à fils résistants a été exposée plus haut.

Nous avons trouvé ε_m proportionnel à f_0 (*fig.* 6). Sa valeur mesurée est toujours inférieure de 20 à 30 % à sa valeur calculée. (Cet écart est nettement supérieur aux erreurs de mesures.)

Pour expliquer cela, la théorie vérifiée précédemment n'est pas à mettre en doute. On peut supposer que le facteur de jauge donné par le constructeur, établi pour un matériau métallique de coefficient d'élasticité élevé, ne convienne pas dans le cas d'un matériau plastique : la raideur propre de la jauge, importante par rapport à celle du matériau sous-jacent, diminue son extension.

Ces observations sont en accord avec les travaux de Clark [8]. En étudiant l'extension longitudinale produite, en un point d'une barre de C.R. 39, par le passage d'une onde élastique, Clark a trouvé que la valeur mesurée, avec les jauges, représentait seulement 75 % de la valeur calculée.

Les extensomètres à fil résistant ne se prêtent donc pas à des mesures quantitatives sur le matériau considéré. Ils nous ont permis, cependant, de mettre en évidence la proportionnalité des extensions à $\cos \frac{\beta_1 x}{l}$; les mesures étant faites en des points suffisamment éloignés les uns des autres pour que les variations soient appréciables compte tenu des erreurs expérimentales.

Si besoin était la méthode exposée permettrait l'étude systématique du comportement des extensomètres sur le matériau.

4,3 **Phase de la réponse.**

La courbe de phase est établie de manière classique en formant, sur l'écran de l'oscilloscope cathodique, les figures de Lissajoux entre les signaux correspondant d'une part à la force excitatrice, d'autre part au déplacement de l'extrémité libre.

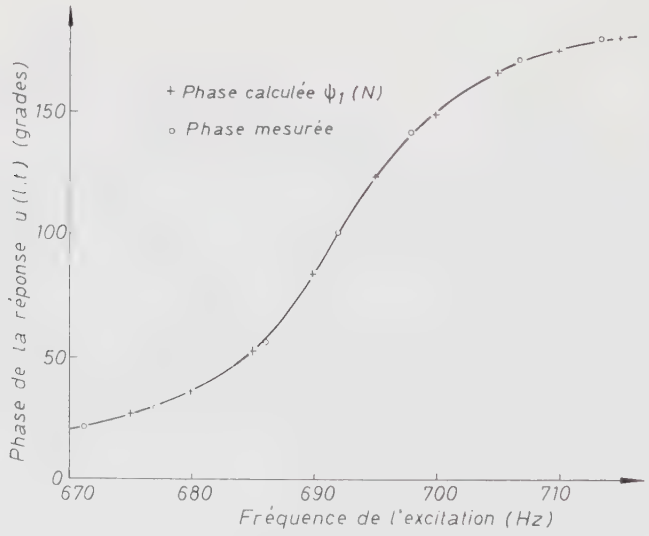


Fig. 15.

Nous savons qu'un signal en phase avec la force excitatrice est obtenu en prenant la tension aux bornes d'une résistance pure parcourue par le courant d'excitation.

La tension, fournie par le système de mesure du déplacement, est sensiblement en phase avec le signal réel.

Nous n'avons pu distinguer expérimentalement la résonance de phase de la résonance d'amplitude. L'écart des périodes :

$$T_1 - T_{\psi_1} \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{\Omega_{\psi_1}}$$

est d'autant plus grand que Ω_{ψ_1} est petit. Dans le cas le plus favorable réalisé, il est d'environ $2{,}5 \times 10^{-7}$ s, valeur inférieure aux erreurs de mesures.

La courbe expérimentale coïncide avec la courbe calculée, à partir des valeurs expérimentales $\mu = \mu_1$ et $\Omega_{\psi_1} \simeq \Omega_1$ (*fig.* 15).

$$\operatorname{tg} \psi_1 = 2\alpha \frac{N}{N_{\psi_1}} \frac{1}{1 - \frac{N^2}{N_{\psi_1}^2}}$$

Rappelons que la méthode de mesure extensométrique ne permet pas d'obtenir la phase ψ_1 par suite du déphasage important introduit par l'appareillage électronique.

5 CONCLUSION

Faisons le bilan de ce que la théorie prévoit et qui a été vérifié par l'expérience.

— proportionnalité de u_m et ε_m à f_0;

— proportionnalité de $\varepsilon_m(x)$ à $\cos \frac{\beta_1 x}{l}$;

— forme de la courbe de résonance;

— valeur de $u_m(l)$;

— même phase pour les extensions en deux points;

— phase de $u(l, t)$.

Les deux derniers résultats impliquent que la phase de $\varepsilon(x, t)$ est bien celle calculée.

Il en résulte que la réponse de l'éprouvette d'araldite est représentée par le premier mode de vibration $u_1(x, t)$. Par suite, le moule mathématique linéaire, sous les réserves indiquées, rend compte du comportement de l'araldite au voisinage de la résonance.

Nous avons constaté que le même type de moule convient également pour deux autres matériaux : le plexiglas M. 222 et le C.R. 39.

Chapitre II

ÉTUDE MÉCANIQUE EN DEHORS DE LA RÉSONANCE

Dans le cadre de notre schématisation, en vibrations longitudinales, nous nous proposons de rechercher pour le matériau un moule mathématique en dehors de la résonance ($\Omega < \Omega_{\psi_1}$).

1 PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE MESURE

La méthode de mesure consiste à associer en série deux éléments : l'un comprenant une éprouvette du matériau à étudier, l'autre une éprouvette d'un matériau de caractéristiques mécaniques connues. Les organes de liaison, assimilés à des solides indéformables, n'interviennent que par leur masse.

Lorsque la fréquence de la force excitatrice est faible par rapport aux fréquences propres de chaque système, nous supposons que la répartition spatiale des extensions est uniforme pour chaque matériau. Nous verrons alors que la comparaison des réponses des deux matériaux résout le problème.

Considérons le système formé d'une éprouvette de matériau plastique à étudier, en série, avec une éprouvette métallique solidaire d'une partie fixe. Prenons, *a priori*, le moule mathématique de Kelvin-Voigt, dans cette hypothèse chaque élément peut se schématiser par un ressort et un dash-pot en parallèle (*fig.* 16). Pour le matériau plastique, le ressort a pour raideur $K_2 = \dfrac{E'S}{l}$ et le dash-pot a pour amortissement $b_2 = \dfrac{\mu S}{l}$ (S section, l longueur de l'éprouvette). Désignons par y_1 et y_2 les élongations respectives des ressorts à partir de leur position d'équilibre. Les équations du mouvement sont :

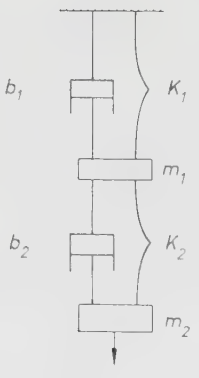


Fig. 16.

$$m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 - b_2 \dot{y}_2 + K_1 y_1 - K_2 y_2 = 0$$

$$m_2 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + b_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 = F_0 \cos \Omega t.$$

Cherchons les solutions stationnaires sous la forme $y_i = \mathcal{R}_e (B_i' e^{j\Omega t})$, $\mathcal{R}_e$ signifie « partie réelle », $j^2 = -1$, $B_i' = B_i e^{-j\theta_i}$ avec θ_i, B_i réels.

Nous sommes conduits à la résolution du système :

$$[(K_1 - m_1 \Omega^2) + j b_1 \Omega] B_1' - [K_2 + j b_2 \Omega] B_2' = 0,$$

$$- m_2 \Omega^2 B_1' + [(K_2 - m_2 \Omega^2) + j b_2 \Omega] B_2' = F_0.$$

Plaçons-nous dans le cas particulier où la fréquence d'excitation est faible par rapport aux fréquences des deux systèmes et $K_1 > K_2$:

$$B_1' \simeq \frac{F_0}{K_1 + jb_1\Omega}, \qquad B_2' \sim \frac{F_0}{K_2 + jb_2\Omega}.$$

Ce qui montre qu'au niveau de chaque système la force est égale à la force excitatrice. Ce résultat était prévisible puisque le choix de la pulsation d'excitation l'implique pour chaque système.

Supposons $b_2^2\Omega^2 \ll K_2^2$ et $b_1 \ll b_2$ (ce qui est le cas pour un métal par rapport à un matériau visco-élastique). Nous avons alors :

$$y_1 \simeq \frac{F_0}{K_1}\cos\Omega t, \qquad y_2 \simeq \frac{F_0}{K_2}\cos(\Omega t - \theta_2) \qquad \text{avec} \qquad \theta_2 \simeq \frac{\mu\Omega}{E'}.$$

La comparaison des amplitudes des deux extensions (allongements par unité de longueur) donne E' à partir de K_1. Le déphasage θ_2, voisin de l'angle de perte, permet alors d'obtenir μ.

2 RÉALISATION EXPÉRIMENTALE

2,1 Description de l'appareil.

La *figure* 17 montre une photographie de l'appareil.

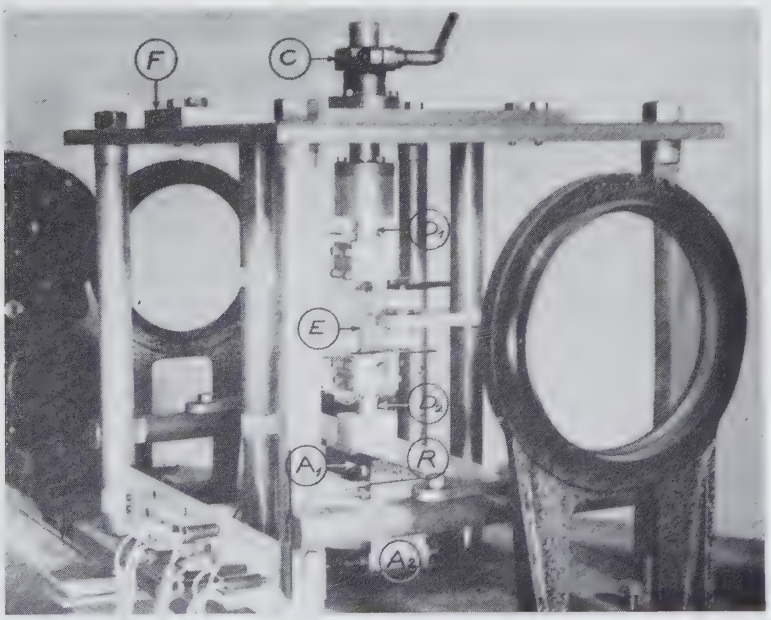


Fig. 17.

Nous distinguerons :

— le bâti constitué par deux plaques de fer rectangulaires réunies par six colonnes, quatre aux angles, deux dans la partie centrale, assurant à l'ensemble une grande rigidité;

— l'excitateur composé d'un électro-aimant, d'une lame élastique R et de caoutchoucs de sections carrées. L'armature inférieure A_2 de l'électro-aimant est fixée à la plaque inférieure; l'armature supérieure A_1 est liée à la lame R, elle-même encastrée, à ses extrémités, sur deux barres transversales réglables en hauteur. Les caoutchoucs sont placés entre les armatures;

— le système de fixation de l'éprouvette. La lame élastique supporte une pièce métallique (en duralumin) comportant une tête de fixation pour bloquer l'extrémité inférieure de l'éprouvette. Un dispositif semblable, assurant la fixation de l'extrémité supérieure de l'éprouvette, est lié à un cylindre mobile normalement à la plaque supérieure; le cylindre peut être rendu solidaire de cette plaque par l'action d'un collier de serrage C. La plaque intermédiaire F permet de placer le cylindre de manière que son axe coïncide avec l'axe de symétrie commun à l'éprouvette et à l'électro-aimant. C'est là une condition essentielle pour que l'effort soit exercé suivant l'axe de l'éprouvette;

— le système de mesure des efforts. Les deux pièces métalliques, comportant les têtes de fixation, présentent deux parties prismatiques D_1 et D_2, de section carrée, ayant pour axe commun, l'axe de symétrie du système. Sur D_1 et D_2 deux extensomètres à fils résistants sont collés, sur deux faces opposées, parallèlement à l'axe.

Dans cet ensemble, nous retrouvons le système, décrit au paragraphe précédent, couplé à l'excitateur par l'intermédiaire de D_2. Les têtes d'encastrement et D_1 jouent respectivement les rôles des masses m_1, m_2 et du ressort de grande raideur K_1.

2,2 **Fonctionnement de l'excitateur.**

Il est bien connu que l'excitation harmonique d'un système mécanique, en dehors de sa fréquence propre, nécessite une force de grande amplitude pour obtenir une réponse notable. Cette raison nous a conduit à réaliser l'excitateur précédemment décrit.

La *figure* 18 schématise l'électro-aimant et son dispositif d'alimentation.

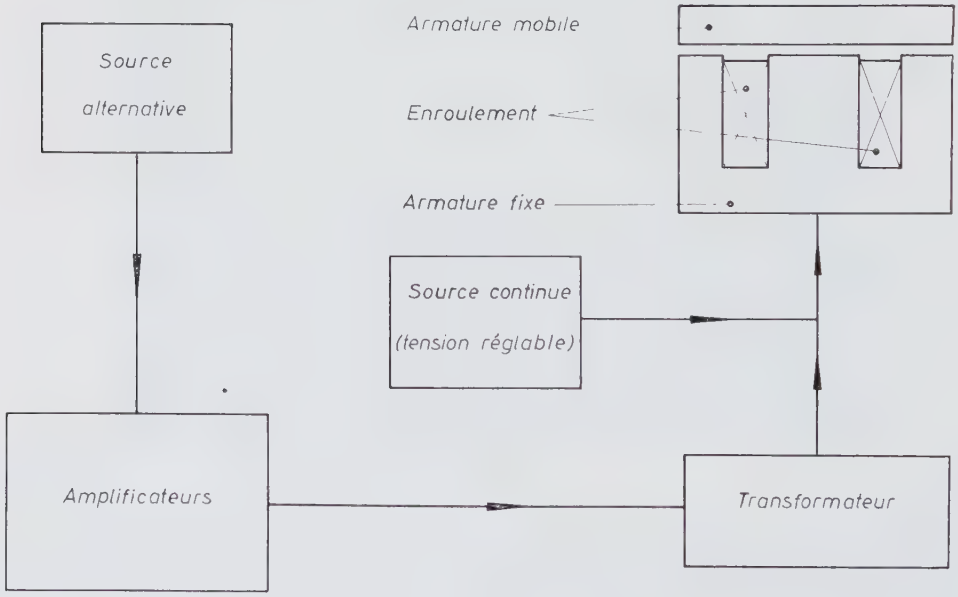


Fig. 18.

Analysons le fonctionnement de l'excitateur.

Désignons par a la distance entre les armatures, n le nombre de tours de l'enroulement, L sa self, s la section normale aux lignes de force du circuit magnétique. Ce dernier n'étant pas saturé, la self a pour expression $L \simeq \frac{2\pi n^2 s}{a}$. Supposons qu'un faible déplacement de l'armature ne fasse pas varier le courant i de manière appréciable, la force attractive, qui s'exerce entre les armatures, a alors pour expression :

$$F \simeq \frac{1}{2} i^2 \left| \frac{dL}{da} \right| = s\pi n^2 \frac{i^2}{a^2}.$$

Supposons que l'armature supérieure se déplace faiblement autour d'une position moyenne $a = b$, l'écartement devient $b + y$; y valeur algébrique du déplacement (de A_2 vers A_1). La force électromagnétique F, subie par A_1, a pour expression :

$$F \simeq -s\pi n^2 \frac{i^2}{b^2\left(1 + \frac{y}{b}\right)^2} = -\frac{2\pi n^2 s}{b^2} i^2 \left(1 - \frac{2y}{b}\right).$$

Prenons $i = i_0 + i_1 \cos \Omega t$ et $i_1 \ll i_0$:

$$F \simeq -\frac{s\pi n^2}{b^2}\left[i_0^2 + 2 i_0 i_1 \cos \Omega t - 2 i_0^2 \frac{y}{b}\right].$$

Les trois termes correspondent à :

— une force constante;

— une force sinusoïdale, proportionnelle à i_1, de même fréquence que le courant d'excitation;

— une raideur négative qui s'ajoute à la raideur du système.

Il est essentiel, pour notre étude, d'éliminer la force statique. A cette fin, les conditions suivantes sont réalisées pour $i = i_0$:

— éprouvette débloquée;

— lame R réglée à hauteur convenable de manière à être sous tension pour $a = b$;

— caoutchoucs comprimés.

La force statique due à i_0^2 est alors équilibrée par l'ensemble lame R et caoutchoucs.

Ces derniers, en dehors de ce rôle compensateur, contribuent à assurer la stabilité du système. La théorie précédente suppose, en effet, qu'au cours de tout mouvement de l'armature A_1, la face inférieure de A_1 reste parallèle à la face en regard de A_2. En réalité, en l'absence de caoutchoucs, un tel mouvement est de courte durée. L'armature A_1 effectue une rotation et vient en contact avec A_2. Cette instabilité est facilement explicable. Toute inégalité d'écartement des armatures se traduit par un couple qui croît à mesure que l'écart augmente. Il s'ensuit une rotation de A_1 à laquelle la lame R ne peut s'opposer. Par contre, si les caoutchoucs sont placés entre les armatures, l'expérience montre que le mouvement désiré est obtenu, ce qui indique que tout mouvement d'instabilité naissant, qui s'accompagne d'un couple dû à la raideur négative, provoque de la part des caoutchoucs un couple antagoniste supérieur.

Supposons que les forces de rappel des caoutchoucs et de la lame R soient linéaires pour les faibles déplacements, $\left|\frac{y}{b}\right| < \frac{1}{100}$, autour de la position d'équilibre $a = b$. La résultante de ces forces et des forces électromagnétiques est alors équivalente à l'action d'un ressort de rappel linéaire, au repos pour $a = b$, éventuellement d'un « dashpot », et d'une force proportionnelle à $i_1 \cos \Omega t$.

Nous n'avons pas eu besoin de vérifier expérimentalement si cette schématisation est correcte. Il nous suffit de connaître la force excitatrice.

2,3 **Mesure de la force excitatrice.**

Il est légitime d'étendre à D_2 l'hypothèse faite pour D_1 et pour l'éprouvette viscoélastique, quant à la répartition uniforme de l'extension. D_1 et D_2 jouent alors le rôle de dynamomètres par l'intermédiaire des extensomètres à fil résistant (mesurant une extension moyenne). Afin d'obtenir une sensibilité convenable, les parties D_1 et D_2 ont été évidées suivant leur axe d'un trou cylindrique de manière à diminuer la surface de la section.

Chaque dynamomètre a été étalonné, en traction, sous charge statique. La mesure extensométrique est effectuée avec deux jauges actives. Nous avons vérifié que la variation relative de résistance des jauges $\frac{\Delta R}{R}$ est proportionnelle à la charge.

L'expérience montre que les réponses des extensomètres sont sinusoïdales et d'amplitude réglable, à volonté, en fonction du courant $i_1 \cos \Omega t$. Il est à remarquer que cette réponse n'est sinusoïdale, comme prévu, que dans la mesure où i_0 est grand devant i_1 $\left(\text{on a toujours } i_1 < \frac{i_0}{10}\right)$. L'amplitude de ces tensions sinusoïdales est déterminée, avec une précision de 1 %, à l'aide d'un millivoltmètre électronique. Cependant, l'importance de l'appareillage utilisé ne permet pas d'obtenir l'amplitude de la force à moins de 5 %.

2,4 **Mesure de la réponse de l'éprouvette.**

La réponse de l'éprouvette a été étudiée sous deux formes : l'extension ε et l'allongement $u\ (l, t)$.

L'extension est mesurée, à l'aide de deux extensomètres à fil résistant, comme il est dit au chapitre premier. Si le coefficient de jauge donné par le constructeur est valable, la précision est d'environ 6 %.

Un capteur de déplacement, lié au bâti, permet de connaître, en fonction du temps, le déplacement d'une lame rigide solidaire de la tête de fixation inférieure. Ce déplacement est la somme des allongements du dynamomètre D_i et de l'éprouvette. Nous négligeons la contribution du dynamomètre (sa raideur vaut cinquante fois celle de l'éprouvette et sa longueur est le tiers de celle de l'éprouvette).

L'expérience montre que le mouvement de translation de A_1 s'accompagne d'une légère rotation dans le plan de l'éprouvette. Afin de tenir compte de cet effet parasite, on prend, dans ce plan, la moyenne des déplacements en deux points symétriques par rapport à l'axe (la différence est de 5 à 10 %).

3 CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES EN RÉGIME STATIONNAIRE

Comme dans la première partie, le matériau étudié ici est de l'araldite. Les éprouvettes ont une forme différente (*fig.* 19); les extrémités élargies sont encastrées dans les têtes de fixation.

Nous nous proposons de connaître quatre grandeurs en fonction du temps : les forces de part et d'autre de l'éprouvette, l'extension et l'allongement de cette dernière.

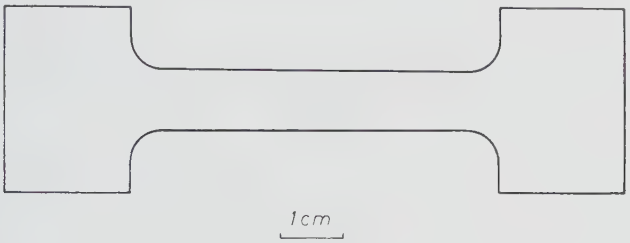


Fig. 19.

Montrons tout d'abord, qu'il n'est pas nécessaire de les enregistrer. Pour i_0 et i_1 constants, deux quelconques de ces grandeurs, observées simultanément à l'aide d'un oscilloscope cathodique à deux voies, sont stables au cours d'un essai dont la durée est volontairement limitée à une dizaine de minutes (ce temps étant supérieur à celui d'une manipulation).

L'observation simultanée, avec deux voies du pont d'extensométrie, des réponses des dynamomètres montre que les forces (sinusoïdales) ont même amplitude et que leur déphasage est inappréciable. A la précision des mesures, les forces sont égales; il s'ensuit que les forces d'inertie sont négligeables, ce qui justifie l'hypothèse faite.

3,1 **Raideur.**

L'expérience montre, pour une force excitatrice sinusoïdale, que l'extension et l'élongation sont également sinusoïdales. La raideur est donc la même en traction et en compression.

La manipulation consiste à mesurer successivement les amplitudes ε_m et $u_m(l)$ de ces deux grandeurs en fonction de l'amplitude de la force excitatrice, pour une pulsation donnée (cette manipulation est effectuée par deux opérateurs en moins de 4 mn). ε_m et $u_m(l)$ sont des fonctions linéaires de l'amplitude d'excitation. La *figure* 20 indique clairement ce résultat (pour une fréquence d'excitation N = 30 Hz); les réponses en tension sont converties en grandeurs appropriées.

La raideur est donc indépendante de l'amplitude. La pente des droites précédentes permet de calculer E′.

La *figure* 21 donne, en fonction de la fréquence d'excitation, E′ calculé à partir de l'extension. Nous voyons que E′ est indépendant de la fréquence (notons que la dispersion des points est inférieure à l'erreur possible de 10 %). Nous trouvons $E' = 350 \pm 15$ kg/mm².

Le calcul de E′ à partir de l'allongement conduit à la même conclusion mais la valeur trouvée est plus faible : $E' = 325 \pm 15$ kg/mm².

L'écart entre les deux résultats peut s'expliquer par la remarque, déjà faite au chapitre premier, selon laquelle la raideur propre de l'extensomètre gêne la déformation

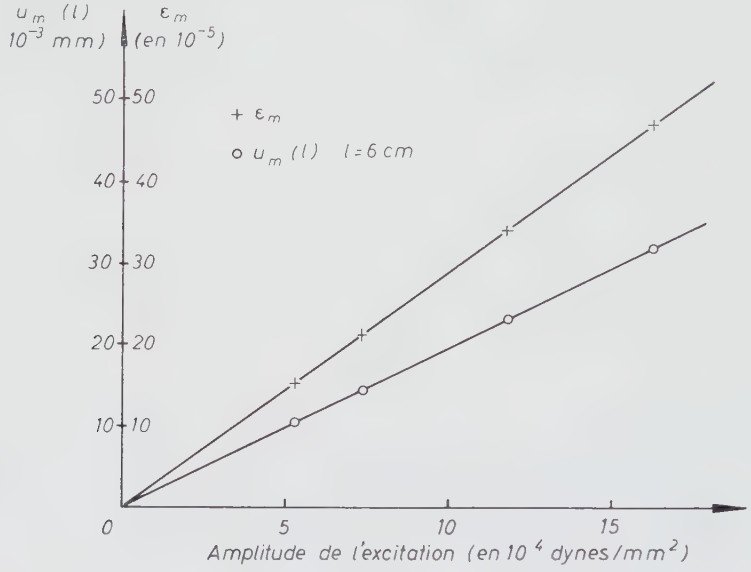


Fig. 20.

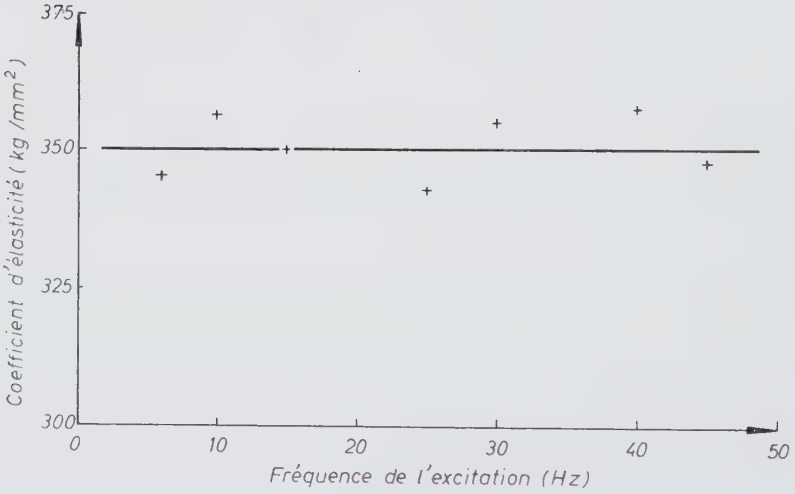


Fig. 21.

du matériau sous-jacent. Il semble, cependant, que l'extension mesurée soit plus près de l'extension réelle lorsque la fréquence est basse (la marge d'erreur ne permet pas de conclure).

3,2 **Amortissement.**

Il suffit, pour déterminer l'angle de perte, de mesurer le déphasage entre l'extension de l'éprouvette et l'extension d'un dynamomètre [cf. chap. premier, 2,3, *a*)].

Nous avons trouvé l'angle de perte indépendant de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation ($3\ \text{Hz} \leqslant N \leqslant 45\ \text{Hz} < N_{\gamma_1}$) :

$$\frac{\mu\,\Omega}{E'} = (2{,}2 \pm 0{,}3)\ 10^{-2}.$$

A la précision des mesures, cette valeur est égale au double de l'angle d'amortissement α déterminé au voisinage de la résonance de phase (à la même température ambiante).

Nous retrouvons donc, pour le coefficient de viscosité μ, la même loi de variation en fonction de la fréquence. Cette loi a déjà été mise en évidence (signalé dans [6]), mais peut-être pour des fréquences plus basses.

4 DÉTERMINATION STATIQUE DU COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ

L'essai statique est effectué en traction.

Le dispositif expérimental, décrit dans l'étude au voisinage de la résonance, est ici partiellement utilisé. Une longue éprouvette (déjà employée dans une précédente étude) est encastrée, à son extrémité supérieure, normalement au bâti métallique. Un « support » de bobine, fixé à l'extrémité inférieure de l'éprouvette, permet de lui appliquer des forces connues (avec des charges) par l'intermédiaire de crochets et d'un fil souple (le bâti est surélevé et un trou ménagé dans le châssis laisse le passage du fil).

Nous nous sommes efforcés de réaliser :

— verticalité de l'éprouvette sans charge;

— position du point d'attache du fil sur l'axe de l'éprouvette.

Avec notre mode de charge, ces conditions sont nécessaires pour que la contrainte soit uniforme sur chaque section de l'éprouvette.

Des extensomètres à fil résistant, collés dans la partie supérieure de l'éprouvette, mesurent l'extension. Deux comparateurs indiquent les déplacements du « support » en deux points symétriques par rapport à l'axe.

L'expérience montre que l'extension est proportionnelle à la charge. Il en est de même des réponses des comparateurs, mais, en général, celles-ci, pour une charge donnée, ne sont pas égales. L'écart relatif observé est d'environ 5 % (nous prenons pour mesure de l'allongement la moyenne de ces deux mesures). Ce qui montre que la traction s'accompagne d'un léger moment fléchissant dû au fait que la force n'est pas appliquée exactement suivant l'axe de l'éprouvette.

Nous avons constaté que les courbes charge et décharge coïncident.

En supposant la section constante (l'erreur est négligeable), les valeurs du coefficient d'élasticité obtenues à partir des mesures d'extension et d'allongement, sont respectivement $E' = 350 \pm 10\ \text{kg/mm}^2$, et $E' = 320 \pm 15\ \text{kg/mm}^2$. Elles sont identiques

aux valeurs obtenues au cours des essais de vibrations à basses fréquences. La remarque déjà faite quant à l'influence de la raideur propre de l'extensomètre est à nouveau valable.

Nous considérons que la seconde valeur est exacte. Elle est égale à la valeur déterminée au cours des essais dynamiques à la résonance. Certains auteurs [56], [8], [11] ont trouvé une nette différence, mais en opérant sur des déformations plus grandes.

Il convient de préciser que la manipulation complète (charge et décharge) est effectuée en moins de 5 mn et que la déformation maximale est faible ($\varepsilon \leqslant 5 \times 10^{-4}$).

BILAN DE L'ÉTUDE MÉCANIQUE

Nous dégagerons d'abord deux faits relatifs aux caractéristiques mécaniques.

Le coefficient d'élasticité E′ est indépendant de l'amplitude de la déformation, indépendant de la fréquence au voisinage ou loin de la résonance. Les valeurs obtenues pour E′ au cours d'essais dynamiques et au cours d'essais statiques sont les mêmes. Notons que E′ déterminé au cours d'un essai statique n'est autre que le module d'Young, E.

En première approximation, le matériau peut être considéré comme élastique. Les résultats précédents se conçoivent alors aisément. Bancroft [3] a montré, dans le cas d'une tige longue de section circulaire, que E′ était très voisin de E lorsque le diamètre de la barre est faible par rapport à la longueur d'onde de la vibration.

Le coefficient de viscosité obéit à la loi $\mu\Omega = C^{te}$ quelles que soient l'amplitude de la déformation et la fréquence (dans les limites étudiées), à la résonance ou loin de la résonance ($\Omega < \Omega_{\psi_1}$).

Le moule mathématique linéaire de Kelvin-Voigt n'est admissible que pour une fréquence donnée, en régime stationnaire (à la résonance ou loin de la résonance), le coefficient de viscosité étant déterminé par la loi précédente. Sous cette réserve, le moule linéaire traduit le comportement des matériaux étudiés.

En régime transitoire, il est bien évident que la loi $\mu\Omega = C^{te}$ n'a plus de sens pour le moule de Kelvin-Voigt; elle en conserve un pour le moule de Képès. Le moule proposé, qui accorde une individualité à chaque mode de vibrations, pourrait être utilisé pour l'étude de lâchers; il a toutefois l'inconvénient de ne pas faire intervenir de grandeur intrinsèque pour la contrainte due à la viscosité.

Pour la suite de notre étude, nous sommes en mesure de déterminer contrainte et déformation à chaque instant et en chaque point de l'éprouvette (araldite, C.R. 39 et plexiglas M. 222), en régime stationnaire, au voisinage de la résonance, sous réserve de rester dans le domaine des faibles déformations.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE PHOTOÉLASTIQUE

Chapitre III

POSITION DU PROBLÈME

La photoélasticimétrie est une méthode d'analyse expérimentale des contraintes basée sur la mesure de la biréfringence accidentelle.

Certains solides transparents, isotropes à l'état libre, deviennent biréfringents dès qu'ils sont soumis à des efforts.

Neumann, puis Maxwell ont effectué l'étude de la biréfringence accidentelle dans un solide élastique contraint. Le premier a attribué l'effet aux déformations, le second aux contraintes. Ils aboutirent à des résultats de la même forme.

Donnons, selon l'usage, les lois dans le langage de Maxwell :

— l'ellipsoïde des indices, caractéristique du matériau, a les mêmes axes que l'ellipsoïde de Lamé au même point;

— si n_1, n_2, n_3 sont les indices principaux, n l'indice du matériau à l'état libre, on a :

$$n_1 - n = c_1\,\sigma_1 + c_2\,(\sigma_2 + \sigma_3),$$
$$n_2 - n = c_1\,\sigma_2 + c_2\,(\sigma_3 + \sigma_1),$$
$$n_3 - n = c_1\,\sigma_3 + c_2\,(\sigma_1 + \sigma_2),$$

c_1 et c_2 étant les constantes photoélastiques absolues.

Considérons l'application de ces lois dans un cas simple. Soit un faisceau polarisé dirigé suivant σ_3 et traversant une épaisseur e. Il donne, à la sortie, deux faisceaux polarisés dont la différence de marche r a pour valeur :

$$r = (n_1 - n_2)\,e = (c_1 - c_2)\,e\,(\sigma_1 - \sigma_2)$$

ou encore :

$$r = \mathrm{C}e\,(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{1}$$

La biréfringence (différence de marche) est donc proportionnelle à la différence des contraintes principales et à l'épaisseur traversée. Elle est indépendante de σ_3. C est la constante photoélastique relative, seule utilisée en pratique. Elle est caractéristique du matériau et de la longueur d'onde.

Notons qu'avec le raisonnement de Neumann, on a :

$$r = \mathrm{K}e\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

K étant une constante sans dimension (pour un corps élastique $\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{CE}}{1+\nu}$, ν coefficient de Poisson).

L'interprétation de la biréfringence à partir de la relation (1) suppose les contraintes principales σ_1 et σ_2, normales au rayon lumineux et identiques en tous points du trajet du rayon (même orientation et même intensité). Sauf cas très particuliers, ces conditions ne sont pas satisfaites. En général, on ne peut avoir une répartition bidimensionnelle des contraintes dans une plaque plane. Il est admis que les variations des contraintes avec l'épaisseur restent négligeables devant la valeur moyenne pour une lame, à faces parallèles, de faible épaisseur et soumise à des forces appliquées dans son plan et uniformément réparties sur l'épaisseur. La biréfringence subie par le faisceau polarisé traversant normalement la lame est sensiblement la même que si les contraintes étaient constantes sur toute l'épaisseur.

Avec cette approximation, la relation (1) est fondamentale en photoélasticimétrie bidimensionnelle statique.

Rappelons la méthode expérimentale. Le modèle étant mis sous charge, on effectue les relevés suivants :

— lieu des points où les contraintes principales ont une direction donnée. Ce sont les isoclines permettant le tracé des isostatiques;

— lieu des points où la différence de marche correspond soit à un nombre entier de longueurs d'onde d'où $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{p\lambda}{Ce}$, $p = 1, 2 \ldots n$ (e épaisseur), soit à un nombre impair de demi-longueurs d'onde (si on utilise des lames quart d'onde parallèles) $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2p+1}{Ce}\frac{\lambda}{2}$. Ce sont les isochromes.

Il est alors possible de déterminer σ_1 et σ_2, soit à l'aide d'une mesure complémentaire de variation d'épaisseur de la lame (méthode de Mesnager), soit en mesurant les différences de marche, introduites par la traversée du modèle, entre le rayon incident et les rayons émergents (méthode de Favre), soit au moyen d'une méthode d'intégration le long des isostatiques, basée sur les équations de Maxwell. Ce dernier procédé est d'un emploi plus courant.

En photoélasticimétrie dynamique, les mêmes lois sont admises ainsi que l'hypothèse de la répartition bidimensionnelle des contraintes dans une lame de faible épaisseur. La connaissance, à chaque instant, des réseaux d'isoclines et d'isochromes permet alors, au moyen de la méthode d'intégration signalée ci-dessus (1), la détermination des contraintes. Précisons que seule la connaissance complète des deux réseaux permet la mesure en tout point.

Le problème est donc de situer, à chaque instant, les lignes isoclines et isochromes qui évoluent rapidement avec le temps.

Les différents procédés d'enregistrements utilisés s'appliquent soit à une étude de l'ensemble du modèle permettant une détermination complète de l'état des contraintes, soit à une étude locale. Cette dernière se prête à des mesures quantitatives dans certains cas particuliers : par exemple, si une contrainte principale est nulle et si l'autre a toujours la même direction (cas d'un bord libre du modèle ou d'une tige en vibration longitudinale avec la schématisation habituelle).

Indiquons les différentes méthodes d'enregistrement.

---

(1) Ce qui suppose que l'on puisse négliger les forces d'inertie.

a) *Photographie d'une bande étroite.*

C'est une méthode d'étude locale. Le modèle est fortement éclairé le long d'une fente étroite; l'image est projetée sur un film sensible se déplaçant rapidement, à vitesse constante, dans la direction perpendiculaire à l'image. Cette méthode exposée, en 1935, par Tuzi et Nisida [58] a permis à ces auteurs de faire la première étude importante de photoélasticité dynamique. Elle a été perfectionnée par Frocht, Flynn et Betser [5], [21] qui sont parvenus à un temps d'exposition inférieur à la microseconde.

b) *Photographie par étincelles.*

Cette méthode permet, en général, l'étude du modèle complet. Elle nécessite une source lumineuse fournissant un éclair de courte durée (de l'ordre de la microseconde). Si les conditions expérimentales peuvent être reproduites exactement, en utilisant différents retards dans les essais successifs, il est possible d'obtenir une série de photographies donnant l'évolution dans le temps [25], [55]. Senior et Wells [55] ont ainsi obtenu, en 1946, les premières photographies d'un réseau complet d'isochromes. Christie [7] (1952) a perfectionné le procédé; il a pu prendre sur un film fixe, neuf images successives au cours d'un même essai en utilisant neuf objectifs et autant de sources lumineuses. Les diverses étincelles étaient déclenchées successivement à des intervalles de temps déterminés. Plus récemment, Zandman [61] utilisant un dispositif générateur d'éclairs, a pu obtenir au cours d'un même essai toute une série d'images sur un film se déplaçant à vitesse constante.

c) *La cinématographie.*

Comme la précédente, cette méthode peut permettre une étude d'ensemble du modèle. Elle a l'avantage de fournir un nombre important de clichés pour un seul essai.

Les premières tentatives d'application de la photoélasticité à des problèmes dynamiques ont été faites par Tuzi [59] et Frocht [19] au moyen de la cinématographie au rythme de 64 images par seconde. Ce rythme trop lent ne permettait pas d'obtenir des clichés nets. Les progrès de la technique, caméras plus rapides, émulsions plus sensibles, sources lumineuses plus intenses, ont permis des vitesses de prises de vues plus grandes. En 1949, Foeppl [18] obtient 3 000 images par seconde. Plus récemment, Sutton [56] a réussi des clichés à 150 000 images par seconde. Le temps d'exposition de chaque image, de l'ordre de la microseconde, est comparable à celui obtenu par Frocht et Flynn [5]. Notons que, dans ce cas, le champ d'observation est réduit de manière à concentrer le faisceau lumineux pour le rendre suffisamment actinique. Signalons que certains chercheurs [11] proposent l'emploi de nouveaux matériaux photoélastiques de module élastique relativement faible. La vitesse de propagation des ondes de contraintes permet alors de réaliser des images nettes au rythme de 13 000 par seconde.

d) *Emploi de cellules photo-électriques ou de photomultiplicateurs.*

C'est une mesure quasi ponctuelle. La lumière traversant une petite région du modèle est envoyée sur une cellule sensible ou un photomultiplicateur. Nous savons que ces appareils donnent un courant proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. A partir

d'un enregistrement continu, il est aisé d'avoir la biréfringence en fonction du temps. Cette méthode est la plus récente. Elle a été utilisée par plusieurs chercheurs Clark [8], Marshall [37], Schwieger et Reimann [53], Sutton [56].

Ces diverses techniques permettent, chacune dans le domaine qui lui est propre, de connaître la biréfringence en fonction du temps. La difficulté est dans l'interprétation de cette donnée de l'expérience. En effet, de nombreux chercheurs s'interrogent sur la validité, dans le domaine dynamique, de la loi fondamentale.

Plus précisément, la question souvent posée est de savoir si la constante photoélastique déterminée en statique est valable en dynamique. Marshall [37] écrit : « il n'y a naturellement aucune raison de supposer que le coefficient biréfringence-contrainte est indépendant du rythme de charge ». Dans de nombreux travaux, les constantes photoélastiques, au sens de Maxwell ou de Neumann (parfois les deux), sont déterminées au cours d'essais dynamiques et au cours d'essais statiques.

Nous ferons les remarques suivantes, concernant ces études :

— le matériau est supposé élastique;

— le modèle étudié est simple. C'est le plus souvent une éprouvette prismatique, soumise à l'une de ses extrémités, suivant son axe, à un choc [56], [8], [5], [37]. Une contrainte principale est supposée nulle, l'autre dirigée suivant l'axe et uniforme sur la section;

— la contrainte est donnée par la loi de Hooke à partir de la déformation mesurée [56], [8], [5] ou bien calculée en fonction d'autres données de l'expérience [11], [5], [37];

— les déformations sont mesurées à l'aide d'extensomètres à fil résistant [56], [8], [5], [21].

Voyons maintenant quelques résultats. Plusieurs chercheurs : Frocht, Flynn, Clark, Sutton ont trouvé la biréfringence proportionnelle à la déformation longitudinale, le coefficient de proportionnalité, indépendant de la vitesse de déformation, ayant la même valeur qu'en statique. Par ailleurs, Sutton, constatant que le coefficient de Poisson a la même valeur en dynamique qu'en statique, conclut qu'il en est de même de la constante K. La constante C est déterminée, selon les auteurs, par $C = \frac{1+\nu}{E} K$ ou par le rapport $\frac{I}{\sigma e}$, (σ étant obtenue comme il est dit plus haut). D'après Sutton, Clark et Marshall, la constante C est plus faible en dynamique qu'en statique (à l'inverse du module d'Young). Par contre, Schwieger et Reimann, utilisant un verre photoélastique, ont obtenu pour la constante C des valeurs identiques dans les deux domaines.

Il convient maintenant de préciser certains aspects des expériences statiques. Les matériaux photoélastiques couramment utilisés fluent sous de faibles contraintes. Sous charge constante une éprouvette s'allonge, la déformation et la biréfringence croissent avec le temps alors que la contrainte varie peu. Dans ces conditions, Sutton [56] a trouvé la biréfringence proportionnelle à la déformation, K est constant alors que C croît avec le temps. Signalons que d'autres auteurs (1) ont observé une variation de la

(1) Cités par Marshall [37].

biréfringence à déformation constante. Nous pensons que les valeurs de C et K obtenues au cours d'essais de fluage ou de relaxation ne sont peut-être pas comparables aux valeurs déterminées au cours d'essais dynamiques où le matériau reste en phase élastique. Les constantes photoélastiques peuvent dépendre du comportement mécanique du matériau et ainsi varier comme le moule mathématique qui traduit ce comportement.

Les matériaux photoélastiques ne peuvent être considérés comme élastiques qu'en première approximation. Ils présentent, en général, un frottement interne très marqué. Nous l'avons mis en évidence, pour l'araldite, le plexiglas M. 222 et le C.R. 39. *Le problème est alors de situer exactement l'effet photoélastique par rapport aux contraintes et aux déformations.* Indiquons, dès à présent, que nous donnerons, par la suite, à effet photoélastique un sens bien précis. D'un point de vue particulier, on peut envisager la question du choix entre les lois de Maxwell et de Neumann. Jessop et Harris [27] écrivent : « jusqu'à présent, il n'a pas été définitivement établi si l'effet photo-élastique est produit par la contrainte ou par la déformation ». Le Boiteux [33] estime : « qu'on a toutes raisons de croire que ce sont les déformations qui fixent la biréfringence ». A notre connaissance, ce fait n'a pas été mis en évidence.

Chapitre IV

RECHERCHE D'UNE LOI RELIANT L'EFFET PHOTOÉLASTIQUE AUX CONTRAINTES ET AUX DÉFORMATIONS

Pour un matériau admettant le même moule mathématique dans un certain domaine de sollicitations, nous nous proposons de rechercher la loi reliant l'effet photoélastique aux contraintes et aux déformations.

Nous étudions, comme dans la première partie, une éprouvette en vibrations longitudinales forcées. Les mêmes matériaux sont employés. Nous nous appuyons sur les résultats déjà établis. Nous appelons réponse photoélastique de l'éprouvette, l'intensité lumineuse transmise. La méthode globale [38] est utilisée pour étudier cette réponse. En partant de la loi classique de l'intensité lumineuse (en sinus carré) l'expression analytique de la réponse photoélastique est précisée progressivement en fonction de divers facteurs.

1 DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

1,1 Banc d'optique.

Nous avons utilisé un banc Jobin et Yvon modèle Le Boiteux. Nous l'avons équipé d'une lampe à vapeur de mercure, basse pression, alimentée en courant continu. Un filtre interférentiel permet d'isoler la raie verte de longueur d'onde $\lambda = 5\,461$ Å.

Les montages décrits dans la première partie, sont placés dans le champ optique de manière que le plan de l'éprouvette soit normal au faisceau lumineux.

1,2 Photomultiplicateur.

Au niveau de l'image de l'éprouvette, un diaphragme réglable permet d'envoyer sur un photomultiplicateur (type RCA 931 A) la lumière transmise par une petite surface du modèle (une lentille divergente étale le faisceau sur la plaque sensible du tube). Afin d'éliminer l'influence des capacités des fils de liaison, le photomultiplicateur a été muni d'une sortie à basse impédance.

Nous avons vérifié que la tension fournie par le système était proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue.

2 EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RÉPONSE PHOTOÉLASTIQUE

L'observation photoélastique s'effectue en lumière rectiligne à $\frac{\pi}{4}$ de l'axe de l'éprouvette. L'intensité lumineuse transmise I (t) est une fonction périodique du temps de même période que l'excitation. La *figure* 22 montre un des aspects des enregistrement obtenus au cours d'une période.

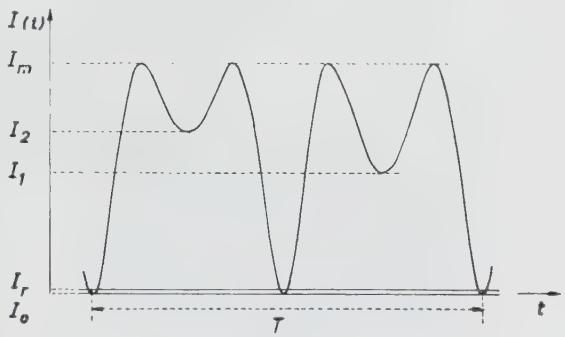


Fig. 22.

I_0 : niveau minimal (à l'extinction totale), tel qu'on peut l'obtenir en l'absence d'éprouvette ou en obstruant l'entrée du photomultiplicateur.

I_m : niveau maximal.

I_r : niveau résiduel correspondant à l'éprouvette au repos.

En général, I_r est petit devant I_m sauf sur les bords du modèle.

La courbe présente au cours d'une période deux parties distinctes, chacune admettant un axe de symétrie. Nous remarquerons que la loi classique ne peut convenir puisqu'elle conduit à deux parties identiques pour chaque demi-période.

Les valeurs I_0 et I_m sont conservées lorsqu'on fait varier l'amplitude de la force excitatrice. La *figure* 23 montre une série d'enregistrements obtenus, à la résonance (à 600 Hz) pour des amplitudes d'excitation croissantes. Précisons que la manipulation complète est effectuée en moins de 2 mn.

2,1 **Méthode de dépouillement.**

Considérons, avec la détermination convenable, les valeurs de φ_1 et φ_2 définies par :

$$\varphi_1 = \text{arc sin} \sqrt{\frac{I_1}{I_m}}, \qquad \varphi_2 = \text{arc sin} \sqrt{\frac{I_2}{I_m}}.$$

Par convention, I_1 est tel que $\varphi_1 > \varphi_2$.

Dans le plan f_0, φ (f_0 amplitude de la contrainte excitatrice), associons à chaque valeur de f_0 les deux points définis respectivement par (f_0, φ_1) et ($-f_0$, $-\varphi_2$).

L'expérience montre que tous les points ainsi obtenus pour différents f_0 sont sur une droite qui ne passe, en général, pas par l'origine. La *figure* 24 indique clairement ce résultat (elle donne le dépouillement des enregistrements *fig.* 23).

A différents points d'une même section du modèle correspondent quelquefois des droites distinctes, mais toujours parallèles. Nous n'avons pas exploré les bords de l'éprouvette souvent très lumineux (zone perturbée par l'usinage).

Dans le cas de l'excitation à basses fréquences, en dehors de la résonance, la pente de la droite est indépendante de x et de Ω. Par contre, à la résonance ou au voisinage, la

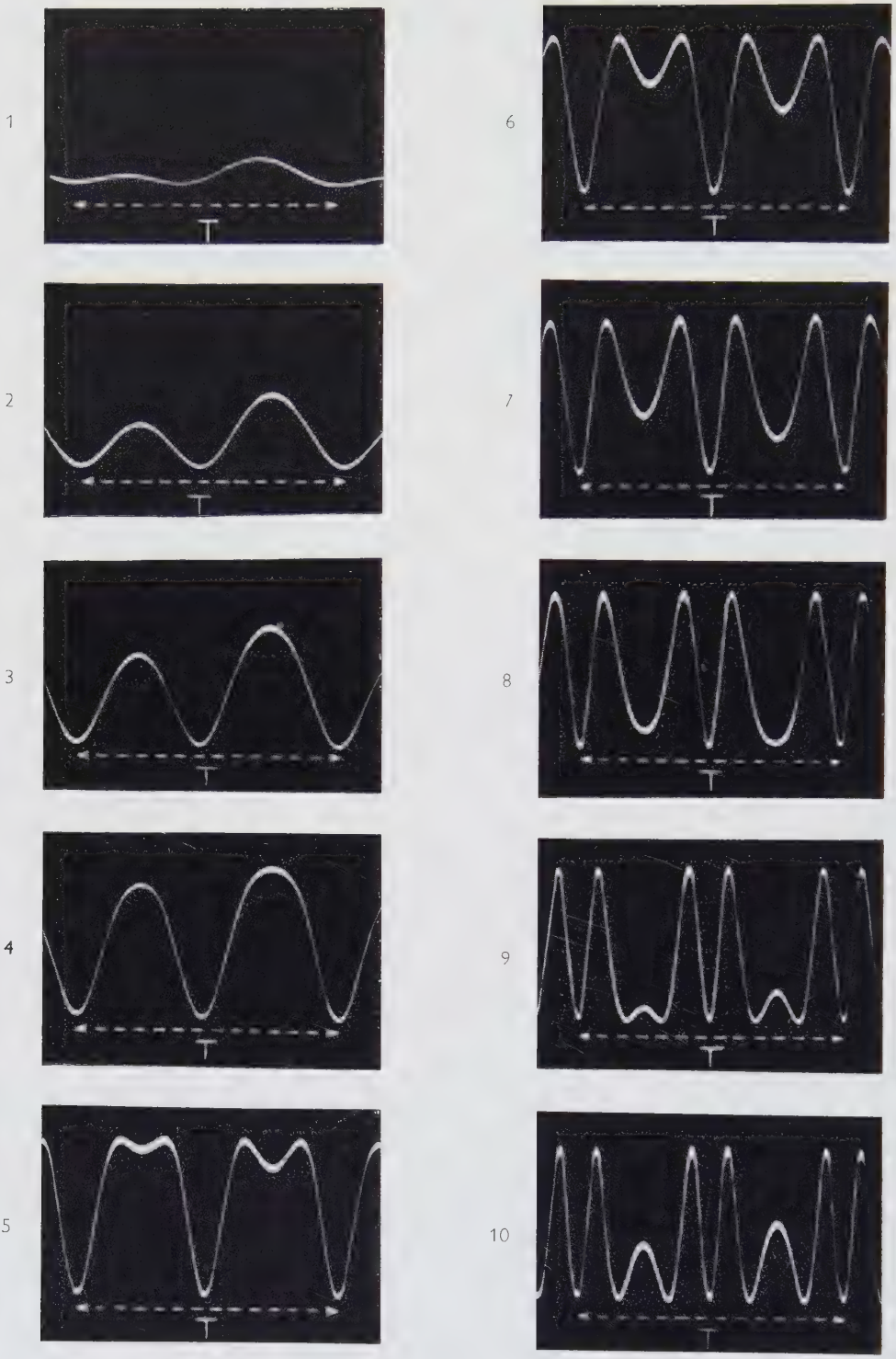


Fig. 23. — Enregistrements de I (*t*) à la résonance d'amplitude, en un même point du matériau.
(Les enregistrements sont numérotés dans l'ordre d'excitation croissante. T désigne la période du phénomène.)

pente dépend de x et de Ω. Désignons-la par G (x, Ω). Par suite, les extrémums I_1 et I_2 de I sont donnés en fonction de f_0, par une loi de la forme :

$$\bar{I} = I_m \sin^2 [\xi \, G \, (x, \Omega) \, f_0 + H_r \, (x)].$$

$\xi = + 1$ pour I_1;
$\xi = - 1$ pour I_2;
G (x, Ω) et H_r (x) positifs.

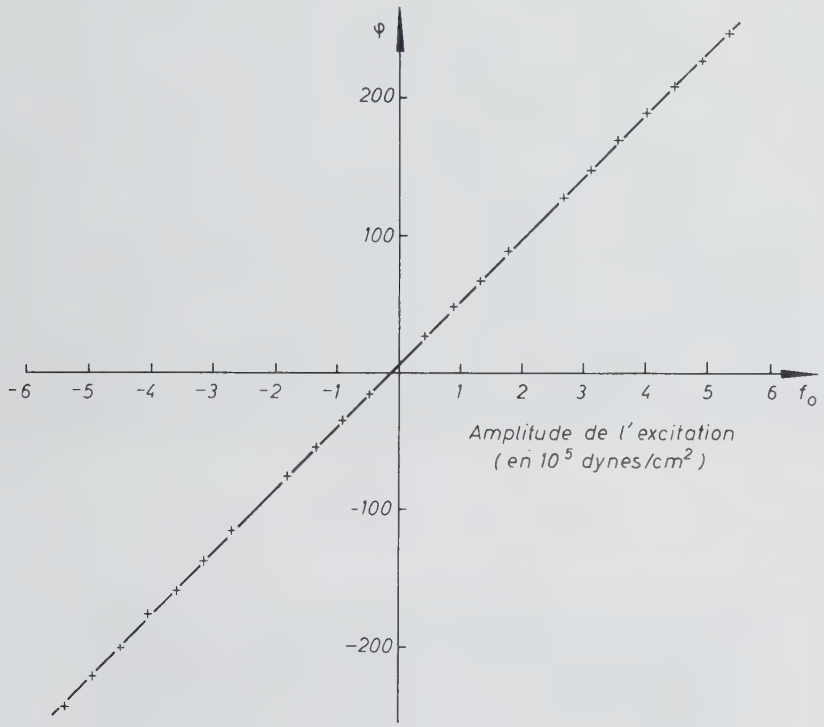


Fig. 24.

2,2 **Expression analytique de I (x, Ω, f_0, t).**

L'expérience montre que, pour x, f_0, Ω donnés, l'enregistrement de la réponse photoélastique coïncide avec la courbe :

$$I \, (x, \Omega, f_0, t) = I_m \sin^2 [G \, (x, \Omega) \, f_0 \cos (\Omega t - \gamma_1) + H_r \, (x)]$$

calculée, en fonction de t, à partir des valeurs expérimentales G (x, Ω) f_0 et H_r (x), γ_1 étant à déterminer. La *figure* 25 est un exemple.

D'autre part, la comparaison des enregistrements simultanés de I (t) et de u (l, t) montre que :

$$I \, (x, \Omega, f_0, t) = I_m \sin^2 [G \, (x, \Omega) \, f_0 \cos (\Omega t - \gamma_1) \mp \varphi_r \, (x)]$$

avec γ_1 voisin de ψ_1 (donc voisin de Φ_1) et $| \varphi_r \, (x) | = H_r \, (x)$, le signe de φ_r (x) étant aisé-

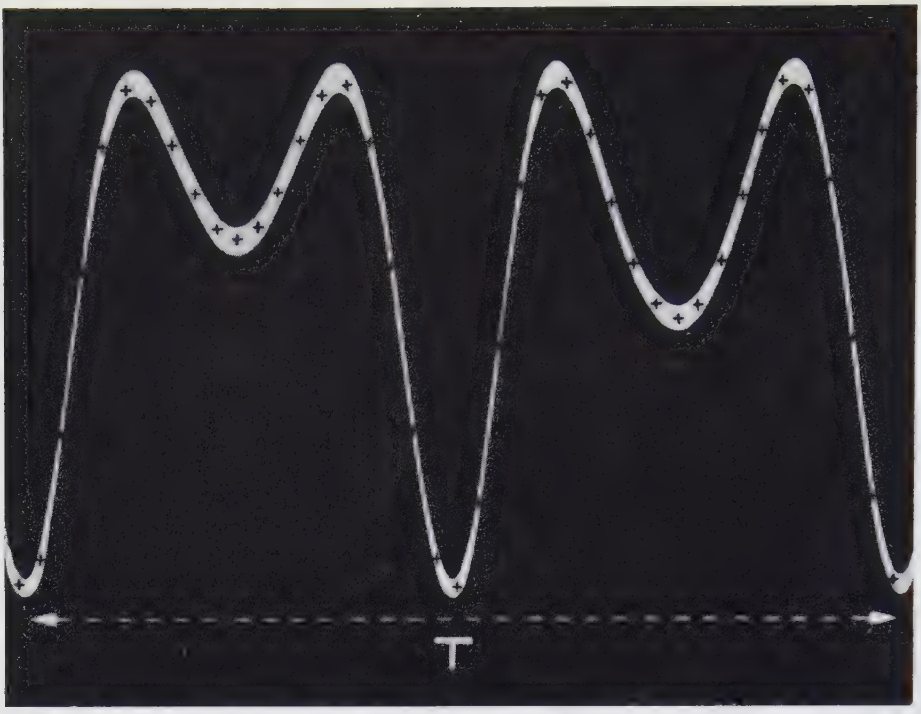


Fig. 25. — Reproduction d'un enregistrement de la réponse photoélastique I (t). T désigne la période du phénomène. Les croix représentent les valeurs calculées.

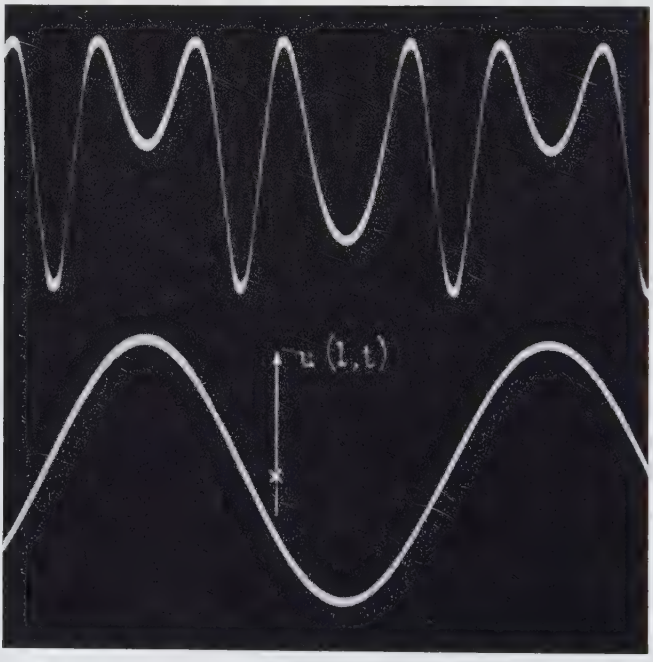


Fig. 26. — Enregistrements simultanés de la réponse photoélastique I (t) et du déplacement u (l,t).

ment choisi. Dans le cas de la *figure* 26, on a $\varphi_r(x)$ négatif. Rappelons que ψ_1 et Φ_1 sont respectivement les phases de $u(x,t)$ et $\sigma(x,t)$ par rapport à l'excitation, au voisinage de la résonance du fondamental.

Notons que la fonction $I(t)$ admet le développement suivant en série de Fourier :

$$I(t) = \frac{I_m}{2}\left\{1 + 2\cos 2\varphi_r\left[-\frac{J_0}{2}(2y) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n}(2y)\cos 2n(\Omega t - \gamma_1)\right] + \right.$$
$$\left. + 2\sin 2\varphi_r \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p J_{2p+1}(2y)\cos(2p+1)(\Omega t - \gamma_1)\right\}$$

avec $y = G(x, \Omega) f_0$ et J_m fonction de Bessel d'ordre m.

Au point x considéré, pour une excitation donnée, le développement en série s'obtient à partir des valeurs expérimentales $G(x, \Omega) f_0$ et $\varphi_r(x)$. Nous verrons plus loin l'intérêt de ce calcul.

Remarque. — En ce qui concerne le plexiglas dont la constante photoélastique est faible comparée à celle de l'araldite, les possibilités d'excitation ne permettent pas d'obtenir I_m. On peut cependant déterminer I_m, $G(x, \Omega) f_0$ et $\varphi_r(x)$ en utilisant les coordonnées des extrémums de $I(t)$. Nous avons trouvé $G(x, \Omega) f_0$ et $\varphi_r(x)$ petits. La loi devient :

$$I(t) \sim I_m [G(x, \Omega) f_0 \cos(\Omega t - \gamma_1) + \varphi_r(x)]^2.$$

En pratique, toute valeur I_a suffisamment grande permet de déterminer $G(x, \Omega)$ et $\varphi_r(x)$ à un facteur près, tant que $\sin\varphi \sim \varphi$. Soient $G'(x, \Omega)$ et $\varphi'_r(x)$ les valeurs ainsi obtenues $I_m G(x, \Omega) \equiv I_a G'(x, \Omega)$ et $I_m \varphi_r(x) \equiv I_a \varphi'_r(x)$. La réponse photoélastique s'écrit :

$$I(t) \sim I_a \left[G'(x, \Omega) f_0 \cos(\Omega t - \gamma_1) + \varphi'_r(x)\right]^2.$$

Déterminons $G(x, \Omega)$.

Fixons x et f_0 et enregistrons la réponse photoélastique pour des valeurs croissantes de Ω comprenant Ω_1. La méthode exposée précédemment permet d'en déduire $G(x, \Omega) f_0$. La courbe représentant $G(x, \Omega) f_0$ en fonction de Ω coïncide, après une affinité convenable, avec la courbe $Y = \left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_{\psi_1}^2}\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\Omega^2}{\Omega_{\psi_1}^2}\right]^{-1/2}$. Il s'ensuit que $G(x, \Omega) f_0$ est proportionnel à Y (*fig.* 27).

Fixons Ω et f_0 et enregistrons la réponse photoélastique en différents points de l'éprouvette. La courbe représentant $G(x, \Omega) f_0$ en fonction de x coïncide, après une affinité convenable, avec la courbe $Y_1 = \cos\frac{\beta_1 x}{l}$ (*fig.* 28).

Notons que ces deux résultats ont été obtenus pour d'autres valeurs de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation, dans les mêmes limites que pour l'étude mécanique.

Il en résulte que les valeurs de $G(x, \Omega) f_0$ sont proportionnelles aux amplitudes des contraintes aussi bien qu'à celles des déformations.

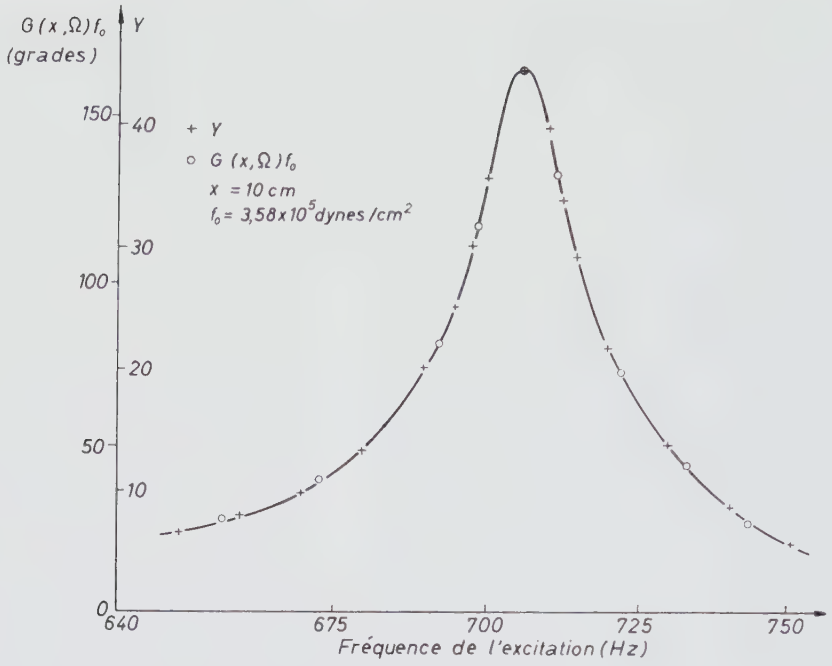


Fig. 27.
(La courbe Y est calculée avec $N\psi_1 = 706$ Hz et $\alpha = 1{,}12 \times 12^{-2}$)

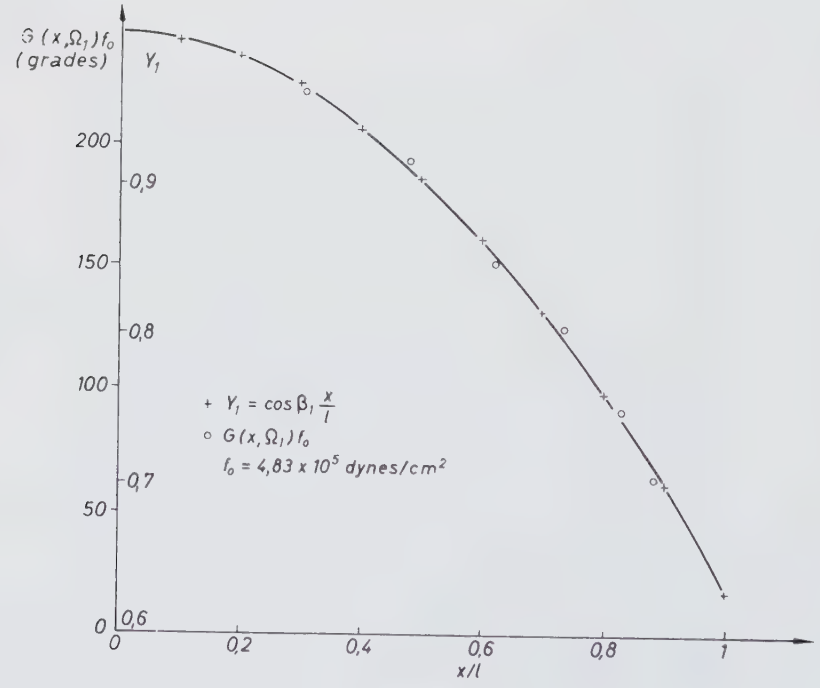


Fig. 28.

3 PROBLÈME FONDAMENTAL : COMMENT EXPRIMER LA RÉPONSE PHOTOÉLASTIQUE EN FONCTION DES CONTRAINTES ET DES DÉFORMATIONS

Nous désignerons maintenant, d'une manière précise, par effet photoélastique, la valeur de arc sin $[I\ (t)/I_m]^{1/2}$ (avec la détermination convenable).

L'analyse précédente montre que l'effet photoélastique peut être considéré, quelles que soient l'amplitude et la fréquence de l'excitation, au voisinage d'une résonance, comme une fonction linéaire de la contrainte et de la déformation :

$$G\ (x,\ \Omega)\ f_0 \cos\ (\Omega t - \gamma_1) \equiv \Lambda_1 \sigma\ (x,\ t) + \Lambda_2 \varepsilon\ (x,\ t),$$

les coefficients Λ_1 et Λ_2 sont déterminés dès que l'on connaît $\psi_1 - \gamma_1$.

Nous envisageons pour notre étude les hypothèses extrêmes : $\Lambda_1 = 0$ (ou $\Lambda_2 = 0$). L'effet photoélastique s'exprime alors en fonction des déformations (ou des contraintes). Nous dirons qu'il est « lié » ou qu'il « dépend » des déformations (ou des contraintes). Nous dirons encore que la réponse photoélastique « suit » les déformations (ou les contraintes). La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est $\gamma_1 \equiv \psi_1$ (ou $\gamma_1 \equiv \Phi_1$).

Nous proposons deux critères permettant éventuellement le choix entre ces deux hypothèses.

3,1 **Critères.**

Considérons dans le plan (X, I) la courbe C_1 définie par :

$$X = f_0 \cos \Omega\ t,$$
$$I = I_m \sin^2 [G\ (x,\ \Omega)\ f_0 \cos\ (\Omega\ t - \gamma_1) + \varphi_r\ (x)].$$

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme. — Pour la courbe C_1 les extrémums I_1 et I_2 de I se trouvent sur l'axe $X = 0$ si, et seulement si, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$.

Cette courbe particulière $\left(\gamma_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ caractérise ce que nous appellerons la résonance de phase photoélastique. Désignons par T_{ψ_1}, T_{Φ_1}, et T* les périodes de l'excitation pour lesquelles ψ_1, Φ_1, γ_1 prennent respectivement la valeur $\frac{\pi}{2}$.

D'après la relation [(chap. premier, § 1,5 (2)], on a :

$$T_{\psi_1} - T_{\Phi_1} = \Delta \text{ avec } \Delta = T_{\psi_1}\ [1 - (1 - 4\ \alpha^2)^{1/2}] \simeq 2\, T_{\psi_1}\ \alpha^2.$$

Les propriétés suivantes résultent du lemme et de la relation ci-dessus.

Propriété 1. — La réponse photoélastique suit la déformation, à la résonance de phase photoélastique si, et seulement si, $T_{\psi_1} - T^* = 0$.

Propriété 2. — La réponse photoélastique suit la contrainte, à la résonance de phase photoélastique si, et seulement si, $T_{\psi_1} - T^* = \Delta$.

Un autre critère permet de se prononcer éventuellement sur le choix d'une des deux hypothèses, non seulement à la résonance de phase photoélastique, mais au voisinage. Il consiste à déterminer $\psi_1 - \gamma_1$.

Considérons dans le plan (U, I) la courbe C_2, définie par :

$$U = u_m(l) \cos(\Omega t - \psi_1),$$
$$I = I_m \sin^2 [G(x, \Omega) f_0 \cos(\Omega t - \gamma_1) + \varphi_r(x)].$$

Propriété 3. — La réponse photoélastique suit la déformation si, et seulement si, C_2 est coupée, au plus, en un point par toute droite $U = C^{te}$ (*fig.* 29).

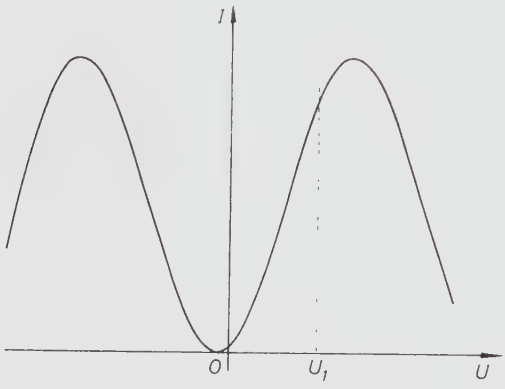


Fig. 29.

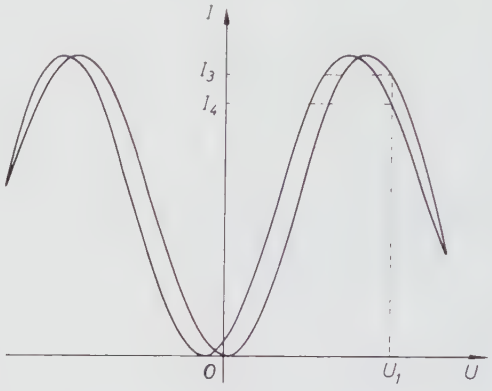


Fig. 30.

Condition nécessaire : si $\gamma_1 \equiv \psi_1$ il suffit de faire varier Ωt dans un intervalle d'amplitude π pour obtenir toute la courbe; à $U = U_1$ correspond, au plus, une valeur de I.

Condition suffisante : la condition — à $U = U_1$ correspond un seul I — est suffisante; en effet, si $\gamma_1 \neq \psi_1$, C_2 est obtenue pour Ωt variant dans un intervalle d'amplitude 2π et l'équation $U = U_1$ ($|U_1| < U_m(l)$) a, dans cet intervalle, deux racines auxquelles correspondent, en général, deux valeurs distinctes de I.

Propriété 4. — La réponse photoélastique suit la contrainte si, et seulement si (ψ_1 étant supérieur à Φ_1), il existe une droite $U = U_1$ coupant C_2 en deux points d'ordonnées I_3 et I_4 vérifiant (avec la détermination convenable) :

$$(1) \qquad \arcsin \sqrt{\frac{I_4}{I_m}} - \arcsin \sqrt{\frac{I_3}{I_m}} = 2\,G(x, \Omega) f_0 \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U_m^2}} \sin(\psi_1 - \Phi_1)$$

avec $\operatorname{tg}(\psi_1 - \Phi_1) = \frac{\mu\Omega}{E'}$ et $U_m = u_m(l)$ (nous convenons de désigner par I_4 le point correspondant à la plus grande valeur de l'arc sinus (*fig.* 30).

Condition nécessaire : si $\gamma_1 \equiv \Phi_1$, on a $\gamma_1 \neq \psi_1$, d'après la propriété 3, la courbe C_2 ne peut présenter qu'un nombre fini de points doubles. Il existe donc une droite $U = U_1$ coupant la courbe en deux points I_3 et I_4. On établit aisément la relation (1), propriété 4.

Condition suffisante : soit une droite $U = U_1$ coupant C_2 en deux points d'ordonnées I_3 et I_4. On a :

$$\text{arc sin } \sqrt{\frac{I_4}{I_m}} - \text{arc sin } \sqrt{\frac{I_3}{I_m}} = 2\,G\,(x,\,\Omega)\,f_0 \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U_m^2}} \sin\,(\psi_1 - \gamma_1),$$

mais la relation (1) étant satisfaite, on a nécessairement :

$$\sin\,(\psi_1 - \gamma_1) \equiv \sin\,(\psi_1 - \Phi_1),$$

par suite :

$$\psi_1 \equiv \Phi_1.$$

Remarque. — Les propriétés sont valables dans le cas où I_m n'est pas connu (§ 2,2 Remarque). La relation (1) de la propriété 4 doit être alors remplacée par :

$$\sqrt{\frac{I_4}{I_a}} - \sqrt{\frac{I_3}{I_a}} \sim 2\,G'\,(x,\,\Omega)\,f_0 \sin\,(\psi_1 - \Phi_1).$$

3,2 **Méthode de mesure.**

Les critères proposés nous ont permis de mettre au point une méthode de mesure différentielle. Avant de l'exposer nous ferons les remarques suivantes :

a) les courbes de résonance de phase $\psi_1\,(\Omega)$ et $\Phi_1\,(\Omega)$ définies d'après le chapitre premier, paragraphe 1,5, ont sensiblement même pente à la résonance de phase : $\frac{1}{a_1}$.

Si $u\,(l,\,t)$ subit un retard δ (1), l'erreur sur T_{ψ_1} est $dT_{\psi_1} = \alpha\,T_{\psi_1}\,\delta$.

Si $I\,(t)$ subit un retard δ', dans l'éventualité de l'une ou de l'autre des hypothèses, l'erreur sur T^* est $dT^* = \alpha\,T_{\psi_1}\,\delta'$;

b) dans le cas de l'expérience, le développement en série de Fourier de la réponse photoélastique peut être limité aux premiers harmoniques. Donnons à titre d'exemple son expression réduite pour l'enregistrement représenté *figure* 25 :

$$I \simeq \frac{I_m}{2}\left[a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\,i\,(\Omega\,t - \gamma_1)\right],$$

$$a_0 = 1{,}32026, \qquad a_1 = -\,0{,}07757, \qquad a_3 = -\,0{,}14647, \qquad a_5 = 0{,}06602,$$
$$a_2 = \quad 0{,}44209, \qquad a_4 = -\,0{,}68182, \qquad a_6 = 0{,}16264,$$
$$a_7 = -\,0{,}01000,$$
$$a_8 = -\,0{,}01646.$$

Supposons la condition suivante satisfaite : les appareils utilisés pour capter et amplifier $I\,(t)$ n'introduisent qu'un même déphasage proportionnel à la fréquence, sur tout signal sinusoïdal de fréquence inférieure ou égale à celle de l'harmonique de rang le plus élevé. Il est alors plausible d'admettre que le signal $I\,(x,\,\Omega,\,f_0,\,t)$ n'est pas déformé, c'est-à-dire que l'enregistrement représente bien le phénomène réel. Le signal est seulement transmis avec un retard égal à celui que subirait un signal sinusoïdal de pulsation Ω.

Précisons la réalisation expérimentale.

---

(1) $u\,(l, \Omega t)$ devient $u\,(l, \Omega t - \delta)$; le mot « retard » aura toujours cette signification pour une fonction de Ωt.

Nous formons sur l'écran de l'oscilloscope cathodique les figures de Lissajoux suivantes :

— force excitatrice (amplificateur horizontal) avec I (t) ou avec u (l, t);

— u (l, t) (amplificateur horizontal) avec I (t) (courbe C_2).

La résonance de phase photoélastique est obtenue pour une période d'excitation telle que les deux extrémums soient sur l'axe de balayage vertical. Il en est de même de la résonance de phase mécanique. Les périodes correspondantes sont mesurées à l'aide d'un chronomètre électronique donnant le 1/10 de microseconde.

La principale difficulté, dans l'utilisation des critères, vient du fait que les quantités $T_{\psi_1} - T_{\Phi_1}$ et $\psi_1 - \Phi_1$ sont petites. L'une est égale à deux microsecondes dans des circonstances favorables et l'autre est comprise entre un et trois grades suivant le matériau utilisé. Il est indispensable de minimiser l'influence des légers retards, inévitables, subis par les divers signaux.

Explicitons ces retards. Désignons par δ_{ij} le retard imposé par l'appareil j sur le signal i. Les indices i et j varient de 1 à 3 : le premier désigne dans l'ordre u (l, t), I (t) et $f_0 \cos \Omega t$; le second, photomultiplicateur, amplificateur vertical et amplificateur horizontal.

Les conditions énoncées en a) et b) étant remplies, nous avons :

$$dT_{\psi_1} = \alpha\, T_{\psi_1} [\delta_{11} + \delta_{12} - \delta_{33}],$$

$$dT^* = \alpha\, T_{\psi_1} [\delta_{21} + \delta_{22} - \delta_{33}],$$

par suite :

$$d\,(T_{\psi_1} - T^*) = \alpha\, T_{\psi_1} [\delta_{11} - \delta_{21}] \qquad \text{puisque } \delta_{22} = \delta_{12}$$

et :

$$d\,(\psi_1 - \gamma_1) = \delta_{11} - \delta_{21} + \delta_{13} - \delta_{22}.$$

Les retards n'auront aucune incidence sur les écarts à mesurer, si $\delta_{11} = \delta_{21}$ et $\delta_{13} = \delta_{22}$.

Nous avons vérifié que les deux amplificateurs de l'oscilloscope cathodique introduisent, sur tout signal sinusoïdal, un même déphasage (à 1/300 de radian près) proportionnel à la fréquence jusqu'à 7 000 Hz : $\delta_{13} = \delta_{22}$.

Par ailleurs, il est vraisemblablement admissible de considérer que les ensembles, photomultiplicateur et système adaptateur d'impédance, introduisent sur tout signal sinusoïdal, pour la gamme des fréquences considérées, un déphasage proportionnel à $Rc\,\Omega$ (R résistance de charge, c capacité parasite). Nous nous étendrons sur la manipulation réalisée pour obtenir $\delta_{11} = \delta_{21}$ car elle fournit un moyen commode de mesurer $\psi_1 - \gamma_1$.

Les deux photomultiplicateurs sont placés devant une même source lumineuse délivrant une intensité sinusoïdale de fréquence réglable à volonté entre 3 Hz et 10 000 Hz. Cette source est une lampe au néon alimentée sous une tension $v = v_0 + v \cos \Omega t$, v_0 et v_1 étant convenablement dosés. Les résistances de charge étant sensiblement égales, le déphasage des réponses des deux photomultiplicateurs est annulé par l'adjonction d'une capacité convenable en parallèle sur la résistance appropriée. Le réglage est effectué à 10 000 Hz. Les réponses restent alors en phase pour toutes les fréquences

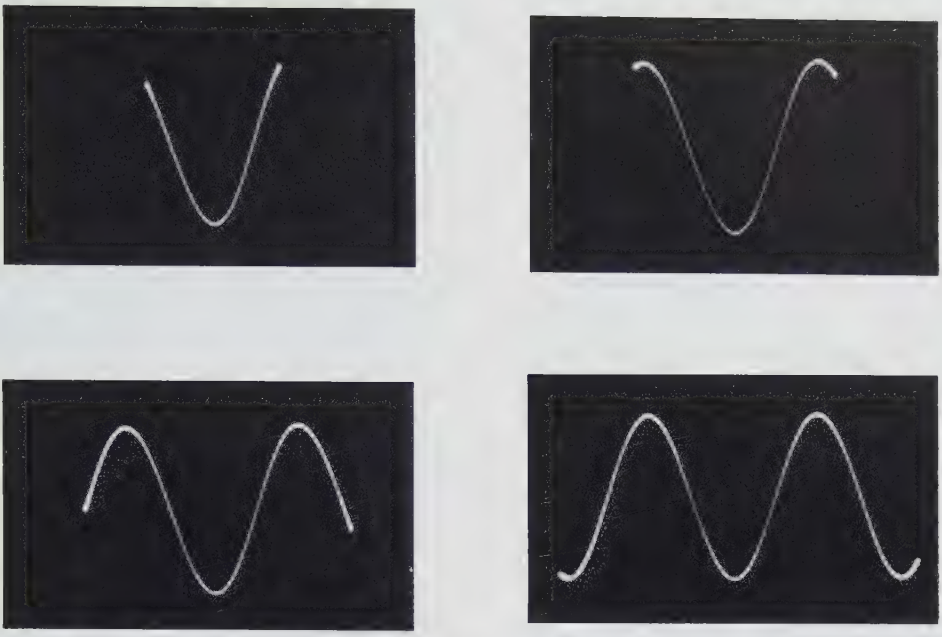
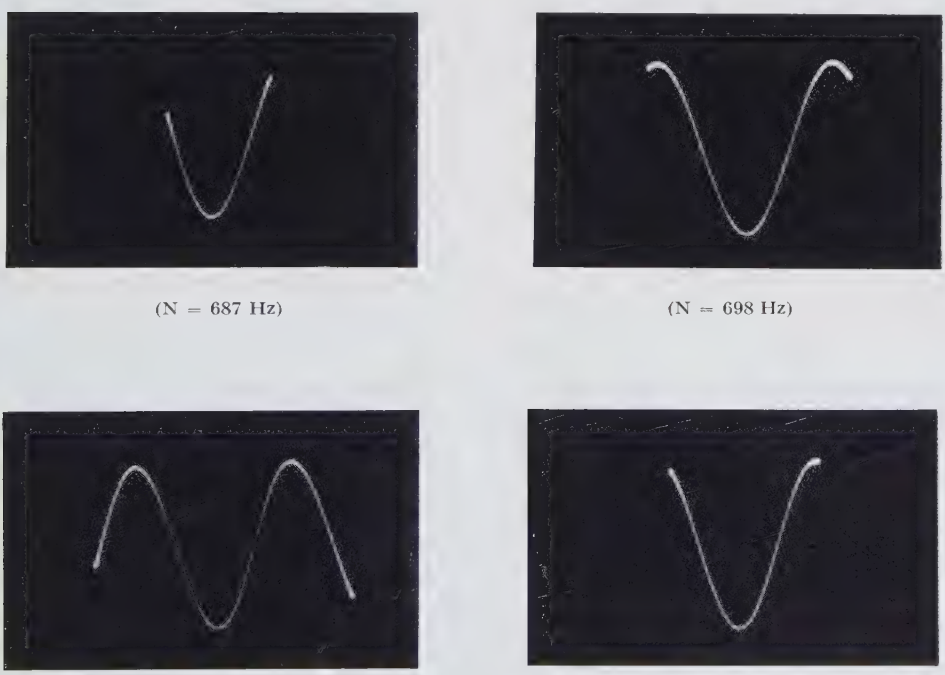


Fig. 31. — Figures de Lissajoux entre $u\ (l,t)$ et I (t), à la résonance, pour différentes amplitudes de l'excitation



(N = 687 Hz) (N = 698 Hz)

(N$_1$ = 706 Hz) (N = 717 Hz)

Fig. 32. — Figures de Lissajoux entre $u\ (l,t)$ et I (t), pour f_e fixé et pour différentes fréquences de l'excitation.

inférieures. Nous avons vérifié que l'introduction d'une nouvelle capacité c (placée comme précédemment) permet alors de déphaser proportionnellement à $c\ \Omega$. Connaissant cette loi de variation, il est facile de mesurer le retard de deux signaux captés par les photomultiplicateurs.

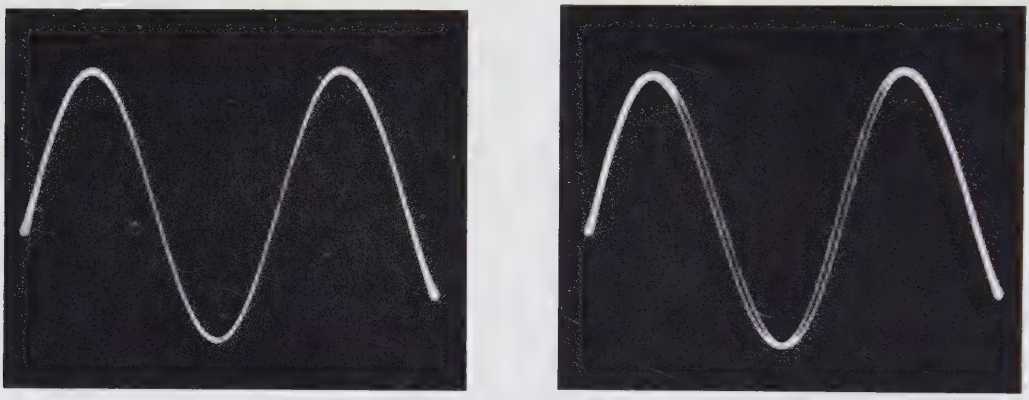
Ajoutons que, pour les deux types de mesure effectués, nous nous sommes toujours assurés que, comme prévu, les résultats étaient indépendants d'une permutation des photomultiplicateurs.

3,3 **Résultats expérimentaux.**

Nous avons étudié plusieurs matériaux photoélastiques.

a) Araldites et C.R. 39.

Pour l'araldite dont nous avons effectué l'étude mécanique nous observons les résonances de phase photoélastique et mécanique pour une même période de l'excitation. Cependant, le premier critère ne permet pas de conclure par suite du trop faible écart $T_{\psi_1} - T_{\Phi_1}$. Par contre, le second critère est d'un emploi facile. La courbe C_2, obtenue en figure de Lissajoux, est au plus coupée en un point par toute droite $U = C^{te}$ quelles



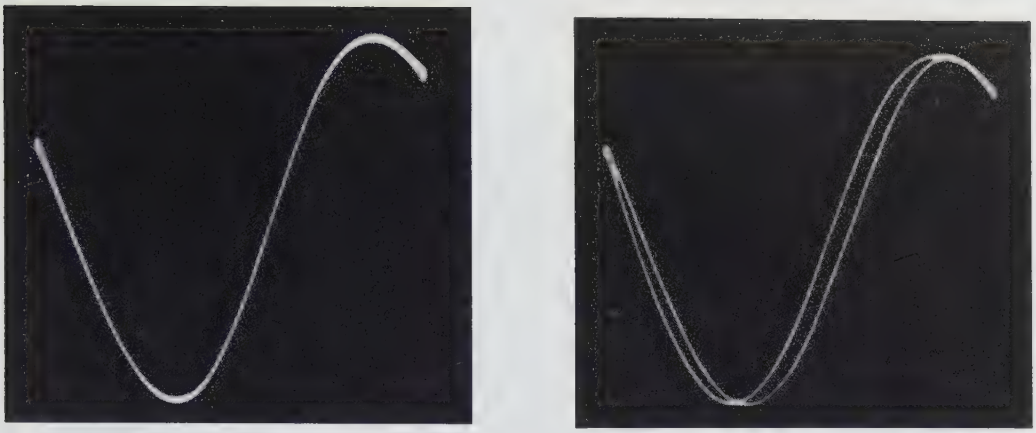
(*a*) (*b*)

Fig. 33. — Figures de Lissajoux entre u (l,t) et I (t) pour l'araldite
(*a*) : Courbe réelle ($\gamma_1 = \psi_1$);
(*b*) : Courbe avec u (l,t) retardé (ψ_1 augmenté de 2 α).

que soient l'amplitude et la pulsation de l'excitation au voisinage de la résonance (*fig.* 31 et 32). D'après la propriété 1 nous pouvons affirmer que la réponse photoélastique suit la déformation. Notons que pour $\gamma_1 \equiv \Phi_1$ — par suite $\psi_1 - \gamma_1 \simeq \frac{1}{50}$ — nous aurions une courbe C_2 très différente (*fig.* 33).

Nous avons utilisé une autre araldite et du C.R. 39 dont les angles d'amortissement sont respectivement égaux à 2,5 % et 2,4 %. Nous avons pu appliquer les deux critères, nous avons trouvé $T_{\psi_1} = T^*$ et $\gamma_1 \equiv \psi_1$. La *figure* 34 montre pour le C.R. 39 la courbe C_2 réelle et ce qu'elle serait avec $\gamma_1 \equiv \Phi_1$.

Il s'ensuit que la réponse photoélastique des araldites et du C.R. 39 suit la déformation.



(*a*) (*b*)

Fig. 34. — Figures de Lissajoux entre $u\ (l,t)$ et $I\ (t)$ pour le C.R. 39
(*a*) : Courbe réelle ($\gamma_1 = \psi_1$);
(*b*) : Courbe avec $u\ (l,t)$ retardé (ψ_1 augmenté de 2 α).

b) Plexiglas.

Pour ce matériau T* ne coïncide pas avec T_{ψ_1}.

La *figure* 35 indique, pour une éprouvette donnée et N_1 voisin de 800 Hz, les diverses courbes observées. La courbe C_1 pour $T = T_{\psi_1}$ diffère de la courbe de résonance de phase photoélastique.

Une des difficultés de mesure de l'écart $T^* - T_{\psi_1}$ tient au fait que la vibration provoque un échauffement du matériau, ce qui modifie légèrement les caractéristiques de raideur et d'amortissement. La raideur décroît avec le temps de vibration comme pour l'araldite; par contre, l'angle d'amortissement croît avec le temps.

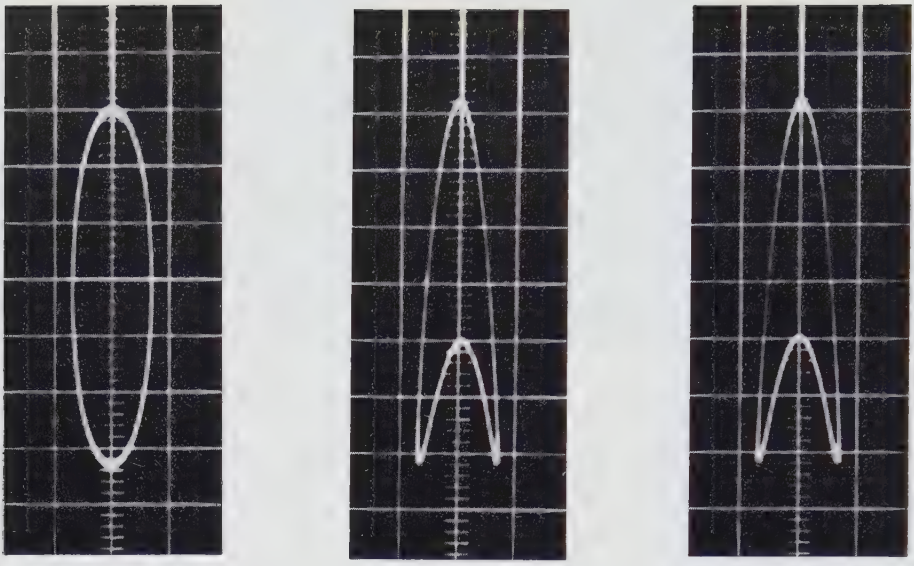
Afin de minimiser l'influence de ces variations nous avons mesuré T_{ψ_1} et T* à quelques secondes d'intervalles. La difficulté est d'effectuer rapidement la seconde mesure. Donnons les résultats obtenus au cours d'une manipulation.

T_{ψ_1}	12 816	12 881	12 950	12 983	12 994
T*	12 794	12 861	12 930	12 905	12 973
$T_{\psi_1} - T^*$	22	20	20	22	23

Les périodes sont données en 10^{-7} s (le chronomètre électronique mesurant les périodes à $\pm\ 10^{-7}$ s près).

L'écart calculé $T_{\psi_1} - T_{\Phi_1}$, avec un angle d'amortissement $\alpha = 2{,}9\ \%$, est de $2{,}2 \times 10^{-6}$ s. Compte tenu des erreurs expérimentales, nous avons ici $T^* = T_{\Phi_1}$.

Une autre méthode consiste à effectuer successivement les mesures de T* et T_{ψ_1} à des intervalles de temps de même durée. Après lissage, nous avons deux courbes



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 35. — Figures de Lissajoux entre :
(*a*) : $f_0 \cos \Omega t$ et $u\ (l,t)$ à la résonance de phase mécanique, $T = T\psi_1$
(*b*) : $u\ (l,t)$ et $I\ (t)$ pour $T = T\psi_1$;
(*c*) $u\ (l,t)$ et $I\ (t)$ à la résonance de phase photoélastique, $T = T^*$.

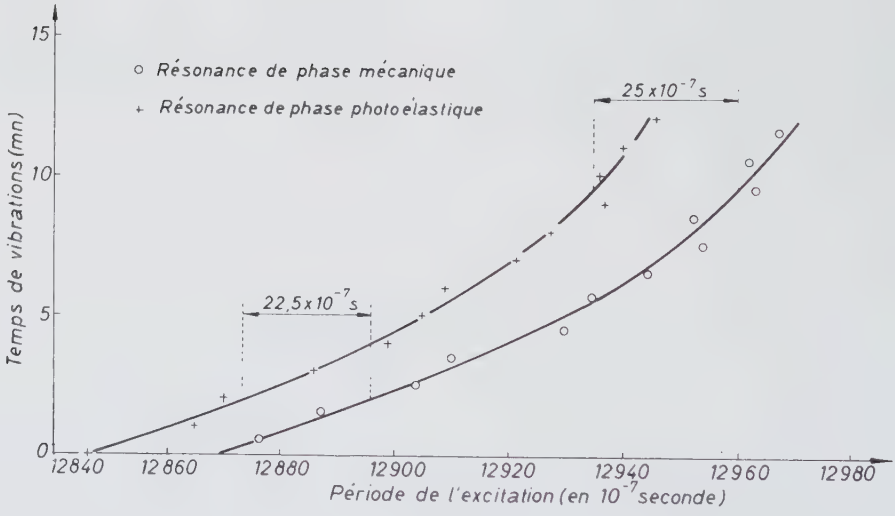


Fig. 36.

(*fig.* 36) dont l'écart reste, à chaque instant, égal à la valeur calculée compte tenu de la variation d'amortissement.

D'après la propriété 2 nous pouvons conclure que la réponse photoélastique suit la contrainte, à la résonance de phase photoélastique.

Appliquons le second critère.

Pour nos possibilités d'excitation, les courbes C_2 ont même allure quelles que soient l'amplitude et la pulsation de l'excitation.

Prenons :

$$U_1 = \frac{u_m}{2},$$

$$I_a = I_m$$

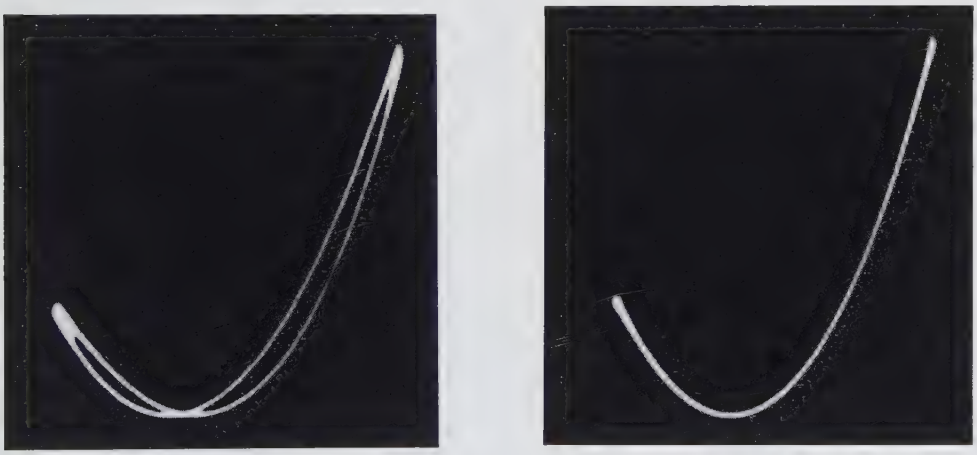
calculé d'après la constante photoélastique statique :

$$G' f_0 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\overline{I_1}}{I_a}} + \sqrt{\frac{\overline{I_2}}{I_a}}\right].$$

Nous avons vérifié, à la précision des mesures, l'égalité :

$$\sqrt{\frac{\overline{I_3}}{I_a}} - \sqrt{\frac{\overline{I_4}}{I_a}} = G' f_0 \sqrt{3} \sin(\psi_1 - \Phi_1),$$

quelles que soient l'amplitude et la pulsation de l'excitation au voisinage de la résonance; ceci pour des pulsations de résonance différentes de 400 à 1 000 Hz. Par ailleurs, on



(*a*) (*b*)

Fig. 37. — Figures de Lissajoux entre u (l,t) et I (t) pour le pexiglas
(a) : courbe réelle ($\gamma_1 = \Phi_1$);
(b) : courbe avec I (t) retardé (γ_1 augmenté de 2 α).

vérifie aisément que $\psi_1 > \gamma_1$, donc, d'après la propriété 4, la réponse photoélastique suit la contrainte.

Nous avons également mesuré $\psi_1 - \gamma_1$ en retardant I (t) — par le jeu d'un condensateur, comme il est dit plus haut — d'une valeur δ_1 connue, de manière à ce que C_2 soit coupée, au plus, en un point par toute droite U = C^{te} (*fig.* 37). D'après la propriété 3,

$\psi_1 - (\gamma_1 + \delta_1) = 0$. La valeur de γ_1 qui convient, quelles que soient l'amplitude et la pulsation de l'excitation au voisinage d'une résonance est $\delta_1 = 2\,\alpha$. On a donc $\gamma_1 \equiv \Phi_1$. Ce procédé a l'avantage d'être très rapide.

Il résulte de cette étude que la réponse photoélastique du plexiglas suit la contrainte, quelles que soient l'amplitude et la pulsation de l'excitation.

A notre connaissance, ce résultat — de même que celui du paragraphe *a*) — n'avait pas encore été établi.

4 ESSAI D'INTERPRÉTATION DE LA RÉPONSE PHOTOÉLASTIQUE A PARTIR DES LOIS CLASSIQUES

Nous ferons le raisonnement pour les contraintes. A partir de la loi de Maxwell, nous retrouverons l'expression de I (*t*), un état de contraintes résiduelles permettant d'expliquer le terme $\varphi_r\,(x)$.

La superposition d'une contrainte résiduelle $\sigma_r\,(x)$ à $\sigma\,(x, t)$ permet d'obtenir aisément l'expression analytique de I (*t*), mais est insuffisante pour traduire l'observation suivante : si l'on utilise de la lumière circulaire, les axes des quarts d'onde étant croisés, le niveau minimal d'intensité lumineuse est en général supérieur à I_0. Pour interpréter cela, il nous suffira d'introduire un état plan de contraintes résiduelles qui, superposé à celui des contraintes $\sigma\,(x, t)$, permet par ailleurs d'exprimer la réponse photoélastique.

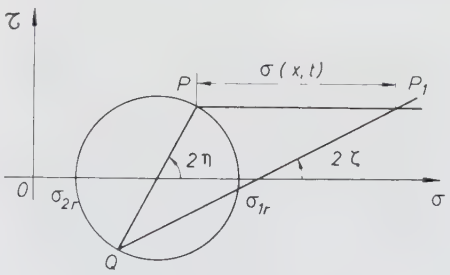


Fig. 38.

Désignons par σ_{1r} et σ_{2r} les contraintes principales résiduelles; pour fixer les idées, supposons-les positives. Soit η l'angle que fait l'axe de l'éprouvette avec σ_{1r}. Les contraintes résiduelles qui s'exercent sur un élément plan perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette sont représentées par les coordonnées du point P du cercle de Mohr des contraintes (*fig.* 38).

Lorsqu'une contrainte $\sigma\,(x, t)$ est appliquée suivant l'axe, le cercle de Mohr a pour diamètre le segment QP_1.

Les contraintes principales varient en grandeur et direction au cours du temps.

Appliquons la loi de Maxwell : la biréfringence est proportionnelle à la différence des contraintes principales, c'est-à-dire au diamètre du cercle de Mohr *d*.

Or :

$$d = [\sigma\,(x, t) + d_r \cos 2\eta] \frac{1}{\cos 2\zeta} \qquad \text{pour} \qquad 2\zeta \neq \frac{\pi}{2}$$

avec d_r diamètre du cercle de Mohr des contraintes résiduelles et :

$$\operatorname{tg} 2\zeta = \frac{d_r \sin 2\eta}{\sigma\,(x, t) + d_r \cos 2\eta}; \qquad \text{pour} \qquad 2\zeta = \frac{\pi}{2}, \qquad d = d_r \sin 2\eta.$$

Observation en lumière circulaire (quarts d'onde croisés). Nous avons :

$$I = \varkappa^2 \sin^2 \left[\frac{\pi\, C e}{\lambda} d \right]$$

avec $\varkappa$ amplitude de la lumière incidente.

Pour $\eta = 0$, I atteint le niveau I_0 au cours de la vibration.

Pour $\eta \neq 0$, I est toujours supérieur à I_0. Ce qui explique l'observation faite précédemment.

Observation en lumière rectiligne à $\frac{\pi}{4}$ de l'axe de l'éprouvette. Nous avons :

$$I = \varkappa^2 \cos^2 2\zeta \sin^2 \left[\frac{\pi\, C e}{\lambda} d \right].$$

Si $\cos^2 2\zeta \simeq 1$, nous avons :

$$I = I_m \sin^2 \frac{\pi\, C e}{\lambda} \left[\sigma\,(x, t) + d_r \cos 2\eta \right].$$

C'est l'expression trouvée expérimentalement avec :

$$\frac{\pi\, C\, e}{\lambda} \sigma\,(x, t) = G\,(x, \Omega)\, f_0 \cos(\Omega\, t - \gamma_1),$$

$$\frac{\pi\, C\, e}{\lambda} d_r \cos 2\eta = \varphi_r\,(x).$$

Cherchons la valeur de $\cos^2 2\zeta$ lorsque $|\sigma|$ est tel que $\frac{d_r}{|\sigma|} \leqslant \frac{1}{7}$. Plaçons-nous dans le cas le plus défavorable où $|\operatorname{tg} 2\zeta|$ est maximal :

$$\cos 2\eta = -\frac{d_r}{\sigma}, \qquad |\operatorname{tg} 2\zeta| \simeq \frac{d_r}{|\sigma|} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d_r}{\sigma} \right)^2 \right].$$

Si $\frac{d_r}{|\sigma|} = \frac{1}{7}$, $\cos^2 2\zeta \simeq 1 - \frac{2}{100}$, et par suite pour $|\sigma| \geqslant 7 d_r$, $\cos^2 2\zeta$ reste voisin de l'unité.

Supposons la quantité $\frac{\pi C e}{\lambda} d_r$ de l'ordre de quelques grades, comme c'est le cas pour l'araldite (pour le plexiglas, cette quantité est bien inférieure). Supposons de plus $G\,(x, \Omega)\, f_0$ grand par rapport à $\frac{\pi C e}{\lambda} d_r$, ce qui se présente expérimentalement. Dans ces conditions, les valeurs de $I\,(t)$ pour lesquelles $|\sigma| < 7\, d_r$ représentent de faibles fractions de la période du phénomène (séparées par des demi-périodes) et correspondent à des valeurs de $I\,(t)$ petites par rapport à I_m.

Il s'ensuit que l'expression de $I\,(t)$, prévue à partir de la loi de Maxwell, a la même forme que celle trouvée expérimentalement.

Le même raisonnement serait possible à partir des déformations; nous avons vérifié que les déformations longitudinales et transversales sont dans un rapport constant.

Dans le cadre de cette interprétation, les résultats exposés précédemment montrent que la réponse photoélastique des araldites et du C.R. 39 vérifie la loi de Neumann et que celle du plexiglas vérifie la loi de Maxwell.

5 ÉTUDE DE LA CONSTANTE PHOTOÉLASTIQUE

Elle a été effectuée avec l'araldite. Nous avons établi que la réponse photoélastique de ce matériau suit la déformation ($\gamma_1 \equiv \psi_1$ et $G(x, \Omega) f_0 \equiv \Lambda_2 \varepsilon_m$). Cependant, suivant l'usage, nous donnerons la constante photoélastique dans le langage de MAXWELL, en prenant en première approximation $\sigma(x, t) = E'\varepsilon(x, t)$.

5,1 Influence de l'amplitude et de la fréquence de la contrainte.

Le coefficient Λ_2 ne dépend pas des variables x, f_0 et Ω au voisinage d'une résonance; il en résulte que la constante photoélastique est la même aux différents points du matériau, qu'elle est indépendante de l'amplitude et de la pulsation de la contrainte. Nous déterminons cette constante pour $\Omega = \Omega_1$. Nous avons :

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = K_1 \varepsilon_m(\Omega_1) = \frac{\pi\, Ce}{\lambda} E' \varepsilon_m(\Omega_1).$$

Il s'ensuit, d'après l'étude mécanique, que :

$$C = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2 f_0} \propto \frac{\lambda}{\pi e} \frac{2\beta_1 + \sin 2\beta_1}{2 \sin \beta_1 \cos \beta_1} \frac{x}{l},$$

$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2 f_0}$ est obtenue d'après la courbe expérimentale du plan (φ, f_0).

Dans toute la gamme des fréquences de résonance étudiées (400 à 1200 Hz) les valeurs trouvées pour C sont comprises entre 52 et 55 Brewsters.

Pour l'étude aux basses fréquences, en dehors de la résonance, les résultats sont identiques ($C = 54 \pm 2$ Brewsters).

Il s'ensuit, à la précision des mesures, et dans les limites étudiées, que la constante photoélastique est indépendante de l'amplitude et de la fréquence de la contrainte.

5,2 Influence de la température.

A la résonance, pour une amplitude d'excitation donnée, la réponse photoélastique varie avec la température ambiante; à température fixe, elle varie avec le temps de vibration. Dans tous les cas, nous avons constaté que le produit $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2 f_0} \propto$ reste constant (à la précision des mesures). Pour une variation de température ambiante de 22° à 29°5 (cf. première partie, chap. premier, § 3), ce produit augmente de 3 %.

La constante photoélastique peut être considérée comme indépendante des légères fluctuations de la température ambiante.

5,3 **Essai statique.**

Le montage utilisé a été décrit dans la première partie.

L'éprouvette est chargée progressivement en traction. La tension I (obtenue à partir du photomultiplicateur) est mesurée pour chaque charge (une tension nulle correspondant à l'extinction totale en l'absence d'éprouvette). Traçons la courbe représentant, avec la détermination convenable, $\varphi = \text{arc sin } \sqrt{\frac{I}{I_m}}$ en fonction de la contrainte, pour les valeurs de cette dernière supérieures ou égales à celles pour lesquelles I commence

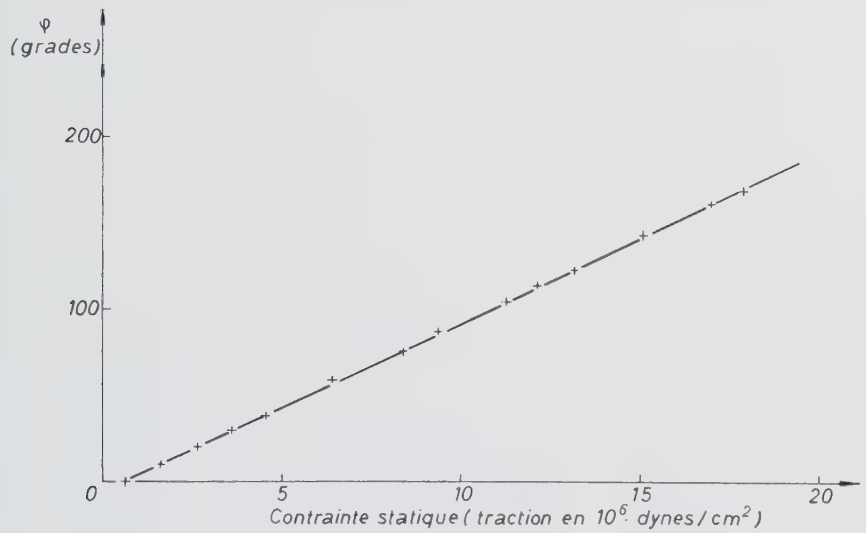


Fig. 39.

à croître. Nous obtenons une droite qui ne passe pas par l'origine en général (dans le cas de la *fig.* 39, I décroît pour les premières charges).

Il en résulte que la constante photoélastique est indépendante de l'amplitude de la contrainte. La valeur trouvée C = 53 ± 2 Brewsters, est égale à celle déterminée au cours des essais dynamiques. Signalons que pour nos essais statiques, effectués en quelques minutes et limités à un domaine de faibles déformations, le fluage est inappréciable.

6 CONCLUSION

Notre étude en vibrations longitudinales répond au problème posé; dans le cadre de notre schématisation, nous avons déterminé la loi reliant l'effet photoélastique aux contraintes et aux déformations. Nous avons trouvé, à la précision des mesures, que pour l'araldite et le C.R. 39 l'effet photoélastique est lié aux déformations alors que pour le plexiglas M. 222, il est lié aux contraintes.

Notons qu'éventuellement pour des matériaux admettant le même moule mathématique, pour lesquels l'effet photoélastique serait une fonction linéaire des contraintes

et des déformations, mais qui n'entreraient pas dans les deux cas extrêmes rencontrés ici, il serait aisé d'établir d'autres critères permettant de déterminer la contribution simultanée des contraintes et des déformations à l'effet photoélastique.

La constante photoélastique de l'araldite apparaît comme une caractéristique intrinsèque du matériau, à la fois indépendante, dans les limites considérées, de la fréquence et de l'amplitude des déformations, du temps de vibrations et de la température ambiante. Elle a la même valeur au cours des essais statiques et dynamiques.

TROISIÈME PARTIE

APPLICATIONS

Chapitre V

COURBE DE PHASE
ÉTUDES DE LACHER

Dans le cadre de notre étude, nous traitons quelques applications : variation du déphasage de la réponse au cours d'un balayage en fréquences, retour au zéro après un lâcher. Dans ce dernier cas, nous admettons que le moule mathématique proposé (1re partie § 4) et les résultats établis pour un régime sinusoïdal stationnaire (2e partie) sont encore valables en régime transitoire.

1 COURBE DE PHASE

La phase de la réponse forcée se détermine aisément à partir de la courbe C_1. De abscisses des extrémums de I (t), on déduit (avec les notations indiquées sur la *fig.* 40),

$$| \cos \gamma_1 | = \frac{d}{D}.$$

Pour l'araldite ($\gamma_1 \equiv \psi_1$), nous avons vérifié que la courbe $\psi_1 (\Omega)$ ainsi obtenue coïncide avec celle qui est établie de manière classique.

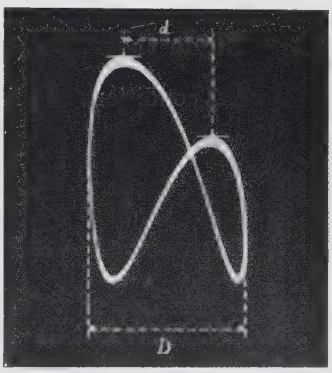


Fig. 40.

2 LACHER A LA RÉSONANCE

Le régime permanent étant établi, on coupe l'excitation : la réponse photoélastique est de la forme (avec une nouvelle origine des temps) :

$$I = I_m \sin^2 [J \varepsilon_m (\Omega_1, x) e^{-a_1 t} \cos (\omega_1 t - \psi) + \varphi_r (x)],$$

où J ne dépend que de la constante photoélastique, de l'épaisseur du matériau et des conditions initiales; ψ ne dépend que des conditions initiales; ω_1 est la pseudo-fréquence propre.

Désignons par $\varphi_1 (n)$ et $\varphi_2 (n)$ les valeurs de φ_1 et φ_2 pour le cycle d'ordre n après lâcher :

$$\varphi_1 (n) - \varphi_r = J \varepsilon_m e^{-a_1 n T}$$

T, pseudo-période.

Il est aisé de déterminer le décrément à l'aide de la pente de la droite passant par les points obtenus en portant en abscisse le nombre de cycles et en ordonnée le logarithme de $\varphi_1(n) - \varphi_r(x)$.

Remarquant que :

$$\varphi_2(n) \simeq \frac{\varphi_2\left(n + \frac{1}{2}\right) + \varphi_2\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2},$$

on peut écrire :

$$\varphi_1(n) + \varphi_2(n) \simeq 2\,\mathrm{J}\,\varepsilon_m\, e^{-an\mathrm{T}}.$$

Il n'est donc pas nécessaire de connaître $\varphi_r(x)$.

Nous avons constaté, pour le décrément ainsi obtenu, que les résultats sont identiques à ceux que donnent les tests classiques du lâcher ou de la bande passante.

3 LACHER AU SENS GÉNÉRAL

L'éprouvette verticale est encastrée à son extrémité supérieure et supporte à l'autre extrémité une masse M permettant de suspendre un poids P. A l'instant $t = 0$, la charge est supprimée.

3,1 **Étude théorique** (1).

Les conditions aux limites sont satisfaites par la solution suivante :

$$u = \sum_i \sin \frac{\beta_i x}{l}\, e^{-a_i t}\,[\mathrm{A}_i \sin \omega_i t + \mathrm{B}_i \cos \omega_i t].$$

Déterminons A_i et B_i à partir des conditions initiales :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t\,0} = 0, \qquad [u(x, t)]_{t\,0} = \varepsilon_0 x,$$

ε_0 étant l'extension due au poids P. La première condition est satisfaite si $\mathrm{A}_i\omega_i - \mathrm{B}_i a_i = 0$. La seconde condition permet de déterminer les B_i (cf. première partie, chap. premier, § 1,4) :

$$\mathrm{B}_i = \frac{4\,\varepsilon_0\, l \sin \beta_i}{\beta_i\,(2\beta_i + \sin 2\beta_i)}.$$

L'extension s'exprime alors par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum \frac{4\,\varepsilon_0 \sin \beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \cos \frac{\beta_i x}{l}\, e^{-a_i t} \left[\frac{a_i}{\omega_i} \sin \omega_i t + \cos \omega_i t\right].$$

L'angle d'amortissement étant supposé le même pour tous les modes ($a_i \simeq \alpha\omega_i$) les B_i étant décroissants, il en résulte que la vibration se réduit au fondamental peu de temps après le lâcher. Déplacement et extension sont alors en phase en tous points de l'éprouvette.

---

(1) Mêmes difficultés qu'au chapitre premier en ce qui concerne l'existence de la solution.

Soulignons le fait que pour t petit la contribution des harmoniques n'est pas négligeable. Il est bien connu [16] que pour un matériau élastique, la perturbation résultant de la suppression brutale de la charge se propage vers l'extrémité encastrée avec une vitesse égale à $\sqrt{\frac{E'}{\rho}}$. Pour t voisin de zéro, l'expression précédente diffère peu de celle qui correspond au cas élastique ($a_i = 0$). En effet, nous avons vérifié qu'en un point x

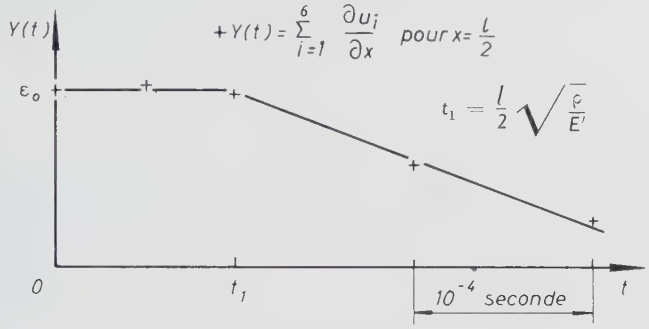


Fig. 41.

et pour $t \leqslant t_1 = \frac{l - x}{\sqrt{\frac{E'}{\rho}}}$, ε_0 est une valeur approchée de la somme de la série. La *figure* 41 donne en fonction du temps, pour $x = \frac{l}{2}$, la somme des six premiers termes de la série dont le reste est majoré, quel que soit t, par 0,03 ε_0. Cela montre que la perturbation se déplace avec une vitesse voisine de $\sqrt{\frac{E'}{\rho}}$.

3,2 **Réalisation expérimentale.**

On utilise le montage réalisé pour l'essai statique.

Les réponses photoélastiques, prises en deux points de l'axe de l'éprouvette, sont observées à l'aide d'un oscilloscope cathodique à deux voies.

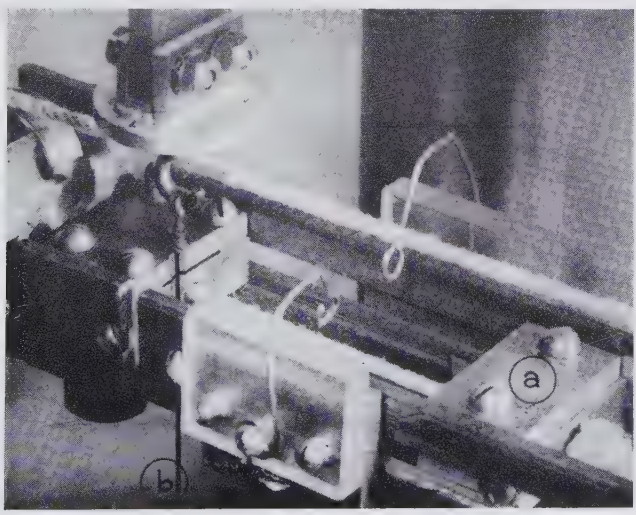


Fig. 42.

Le poids P est suspendu par l'intermédiaire d'un fil souple. Ce dernier est coupé au voisinage de l'attache au moyen du dispositif (*fig.* 42). Une petite masse (*a*), munie d'une lame coupante, mobile dans une glissière horizontale, est soumise par l'intermédiaire d'une poulie et d'un fil souple à l'action d'un puissant ressort. En fin de course, la lame cisaille le fil de suspension (*b*); un contact électrique s'établit au passage de la masse et permet de déclencher le balayage de l'oscilloscope. La vitesse moyenne de la masse en fin de course est d'environ 15 m/s; le fil est sectionné en un temps voisin de 3×10^{-5} s.

3,3 **Résultats expérimentaux.**

L'enregistrement simultané des réponses photoélastiques en deux points de l'éprouvette, met en évidence la propagation de l'onde de détente (*fig.* 43, I (*t*) est constant avant l'arrivée de la perturbation).

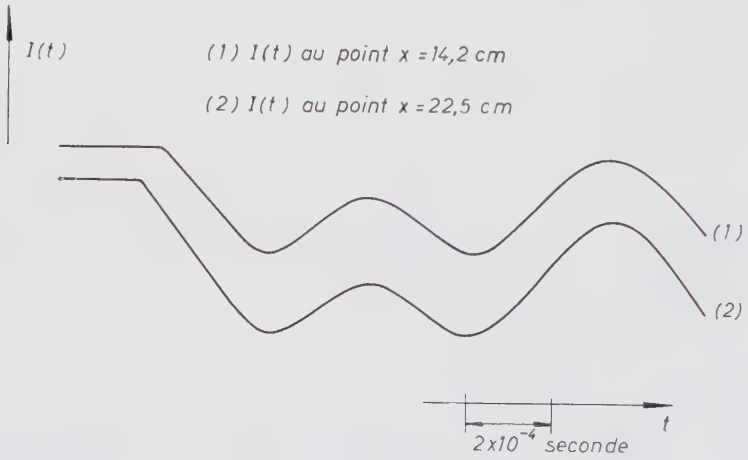


Fig. 43.

L'écart (dans le temps) entre les fronts d'onde reste le même lorsque l'on permute les deux photomultiplicateurs : cet écart n'est donc pas altéré par les appareils de mesure. La vitesse de propagation a été trouvée égale à $\sqrt{\frac{E'}{\rho}}$ (signalons que la précision de la mesure, environ 10 %, pourrait être nettement améliorée par l'utilisation d'un oscilloscope à double faisceaux).

CONCLUSION

Cette étude, en vibrations longitudinales forcées, nous a permis de préciser, pour un certain domaine de sollicitations, le comportement mécanique et photoélastique de quelques matériaux.

Le moule mathématique linéaire de KELVIN-VOIGT est parfaitement admissible, pour une fréquence *donnée*, en régime stationnaire, à la résonance (et au voisinage), ou loin de la résonance. Le coefficient d'élasticité apparaît comme une caractéristique intrinsèque du matériau, à la fois indépendante, dans les limites étudiées, de la géométrie du matériau, de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation. Le coefficient de viscosité est inversement proportionnel à la fréquence; il s'ensuit que déphasage entre contrainte et déformation et perte d'énergie relative sont indépendants de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation.

Il est intéressant de constater que le même moule linéaire, sous réserve du choix du coefficient de viscosité pour une fréquence donnée, permet de prévoir, en régime établi, la réponse à une excitation harmonique, d'une éprouvette des différents matériaux.

Nous avons montré que les extensomètres à fil résistant utilisés ne se prêtent pas à des mesures quantitatives d'amplitude et de phase sur les matériaux expérimentés. Notre travail pourrait permettre une étude systématique de leur comportement.

Du point de vue photoélastique, malgré une biréfringence résiduelle, nous avons pu, dans le cadre de notre schématisation et à la précision des mesures, établir les résultats suivants :

— l'effet photoélastique dépend des déformations pour les araldites et le C.R. 39, alors que pour le plexiglas M. 222, il dépend des contraintes;

— la constante photoélastique de l'araldite a la même valeur au cours des essais statiques et dynamiques, elle est à la fois indépendante de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation.

Il est assez surprenant que, pour les matériaux expérimentés, l'effet photoélastique soit lié ou aux contraintes ou aux déformations. On peut se demander s'il s'agit là de cas exceptionnels ou bien si, pour d'autres matériaux, les résultats seraient ainsi partagés.

Notons que la méthode exposée permettrait de déterminer la contribution simultanée des contraintes et des déformations à l'effet photoélastique pour des matériaux admettant le moule mathématique ci-dessus et pour lesquels l'effet photoélastique serait une fonction linéaire des contraintes et des déformations.

Soulignons que la technique de mesure de l'intensité lumineuse transmise a l'avantage de situer, avec précision, la réponse par rapport à l'excitation. Son intérêt réside aussi dans la possibilité d'obtenir sur les appareils de mesure des indications notables lorsque le matériau (araldite en particulier), soumis à de faibles contraintes, peut être considéré, en première approximation, comme élastique.

Dans le cadre d'études ultérieures, nous envisageons de rechercher un moule mathématique pour l'étude des régimes transitoires et, par ailleurs, d'étendre à divers matériaux la méthode utilisée pour la recherche de la loi reliant l'effet photoélastique aux contraintes et aux déformations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Arakawa. — *On the determination of stress-optical coefficient of bakelite with initial stress.* Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, série 3, vol. 5 (1923), pp. 117-136.

[2] J. Aubaud. — *Recherches sur la relation contrainte biréfringence dans le plexiglas M. 222.* Recherche Aéronautique, n° 26 (1952).

[3] D. Bancroft. — *The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars.* The Physical Review, vol. 59 (1941), pp. 588-593.

[4] K. E. Barnhart et W. Goldsmith. — *Stresses in beams during transverse impact.* Journal of Applied Mechanics, vol. 24 (sept. 1957), pp. 440-445.

[5] A. A. Betser, P. D. Flynn et M. M. Frocht. — *On the stress-optic law under impact loading.* IX^{e} Congrès International de Mécanique appliquée, tome VIII, pp. 367-377.

[6] A. Blaquière. — *Sur un nouveau modèle rhéologique élémentaire.* Cahiers du Groupe français d'Études de Rhéologie, 1, n° 1, pp. 6-17.

[7] D. G. Christie. — *An investigation of cracks and stress waves in glass and plastics by high speed photography.* Transactions of the Society of Glass Technology, vol. 36 (1952), pp. 74-89.

[8] A. B. J. Clark. — *Static and dynamic calibration of a photoelastic model material C.R. 39.* Proceedings of the society for Experimental Stress Analysis, vol. 14, n° 1 (1956), pp. 195-204.

[9] Coker et Filon, révisé par Jessop. — *Photoelasticity.* Seconde édition, Cambridge University Press (1957).

[10] D. M. Cunningham et W. Goldsmith. — *An experimental investigation of beam stresses produced by oblique impact of a steel sphere.* Journal of Applied Mechanics, vol. 23 (déc. 1956), pp. 606-611.

[11] J. W. Dally, W. F. Riley, A. J. Durelli. — *A photoelastic approach to transient stress problems employing low-modulus materials.* Journal of Applied Mechanics (déc. 1959), pp. 613-620.

[12] L. H. Donnel. — *Longitudinal wave transmission and impact.* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, vol. 52 (1930), pp. 153-167.

[13] A. J. Durelli, J. W. Dally et W. F. Riley. — *Developments in the application of the grid method to dynamic problem.* Journal of Applied Mechanics (déc. 1959), pp. 629-634.

[14] A. J. Durelli, E. A. Phillips, C. H. Tsao. — *Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1958).

[15] A. J. Durelli et W. F. Riley. — *Experimental determination of transient stress and strain distribution in two dimensional problems.* IX^{e} Congrès International de Mécanique appliquée, tome VIII, pp. 333-335.

[16] H. Favre. — *Cours de Mécanique.* Vol. III, Dunod, éditeur, Paris (1949).

[17] J. C. Feder, R. A. Gibbons, J. T. Gilbert et E. L. Offenbacher. — *The study of the propagation of stress waves by photoelasticity.* Society for Experimental Stress Analysis, vol. 14, n° 1 (1956), p. 109.

[18] L. Foeppl. — *Slow motion pictures of impact tests by means of photoelasticity.* Journal of Applied Mechanics, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, vol. 71 (1949), pp. 173-177.

[19] M. M. Frocht. — *Kinematography in photoelasticity.* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, vol. 54 (1932), pp. 83-96.

[20] M. M. Frocht. — *Photoelasticity.* Vol. I et II, John Wiley Sons, Inc., New York (1957).

[21] M. M. Frocht et P. D. Flynn. — *Studies in dynamic photoelasticity.* Journal of Applied Mechanics, Contribution of the American Society of Mechanical Engineers. Applied Mechanics Division (mars 1956), vol. 23, n° 1, pp. 116-122.

[22] M. M. Frocht, P. D. Flynn et D. Landsberg. — *Dynamic photoelasticity by means of streak photography.* Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis vol. 14, n° 2 (1957), p. 81.

[23] C. L. Gaudfernau. — *Photoélasticité tridimensionnelle. Aspects théoriques et expérimentaux.* Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, PST n° 330 (1957).

[24] Von E. Giebe, E. Blechschmidt. — *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Dehnungseigenschwingungen von Stäben und Rohren II.* Annalen der Physik, 5. Folge, Band 18, Heft 5 (nov. 1933), pp. 457-485.

[25] W. Goldsmith et G. W. Norris. — *Stresses in curved beams due to transverse impact.* Proceedings Third U.S. National Congress of Applied Mechanics, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (1958), pp. 153-161.

[26] H. T. Jessop. — *The scope and limitations of the photoelastic method of stress analysis.* Journal of the Royal Aeronautical Society (mars 1953).

[27] H. T. Jessop et F. C. Harris. — *Photoélasticité*, Dunod, éditeur, Paris (1952), p. 117.

[28] A. Kammerer. — *L'anisotropie mécanique et optique et les propriétés mécaniques des solides.* IX^{e} Congrès International de Mécanique appliquée, tome VIII, pp. 378-383.

[29] A. Kammerer. — *Recherches sur la photoélasticimétrie.* Hermann et C^{ie}, éditeur (1944).

[30] A. Kammerer. — *Les propriétés mécaniques des solides réels et la théorie de l'élasticité.* Hermann (1951).

[31] M. Kammerer. — *L'utilisation de la photoélasticité dans l'étude des phénomènes dynamiques.* Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Actes du Colloque International de Mécanique, Poitiers (1950), tome V, pp. 210-218.

[32] H. Le Boiteux. — *Étude sur le comportement optique du plexiglas dans le domaine plastique.* La Recherche Aéronautique, n° 42 (nov.-déc. 1954), pp. 7-12.

[33] H. Le Boiteux. — *La Mécanique des solides réels.* Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris (1960).

[34] H. Le Boiteux. — *Théorie de la déformation élastico-visqueuse. Extension aux phénomènes de fatigue.* Analyse des Contraintes, tome II, n° 3, pp. 3-14.

[35] H. Le Boiteux et R. Boussard. — *Élasticité et photoélasticimétrie.* Hermann et C^{ie}, éditeur, Paris (1940).

[36] H. Le Boiteux et M^{me} S. Pauthier. — *Comportement général des matériaux visqueux dans les domaines élastique et plastique.* La Recherche Aéronautique (nov.-déc. 1956), pp. 23-30.

[37] D. F. Marshall. — *The dynamic stress-optic coefficient of perspex.* Proceedings of the Physical Society, Section B (1957), pp. 1033-1039.

[38] R. Mazet. — *Mécanique vibratoire.* Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Paris (1955).

[39] R. D. Mindlin. — *A review of the photoelastic method of stress analysis.* Journal of Applied Physics, vol. 10, n° 4 (1939), pp. 222-241.

[40] R. D. Mindlin. — *A review of the photoelastic method of stress analysis.* Journal of Applied Physics, vol. 10, n° 5 (1939), pp. 273-294.

[41] R. D. Mindlin, L. Goodman. — *The optical equations of three-dimensional photoelasticity.* Journal of Applied Physics, vol. 20 (1949), pp. 89-95.

[42] R. D. Mindlin. — *A mathematical theory of photo-viscoelasticity.* Journal of Applied Physics, vol. 20, n° 2 (1949), pp. 273-294.

[43] R. D. Mindlin, E. A. Fox. — *Vibrations and waves in elastic bars of rectangular cross section.* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (mars 1960), pp. 152-158.

[44] R. D. Mindlin et G. Herrmann. — *A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod.* Proceedings of the first U.S. National Congress of Applied Mechanics (déc. 1952), pp. 187-191.

[45] R. D. Mindlin et H. D. McNiven. — *Axially symmetric waves in elastic rods.* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics (mars 1960), pp. 145-151.

[46] H. C. Perkins. — *Movies of stress waves in photoelastic rubber.* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, vol. 20 (1953), pp. 140-141.

[47] B. Persoz. — *Introduction à l'étude de la rhéologie.* Dunod, éditeur, Paris (1960).

[48] L. Pochhammer. — *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crell), vol. 81 (1876), pp. 324-336.

[49] E. A. Ripperger. — *Longitudinal impact of cylindrical bars.* Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, vol. 10, n° 1 (1952), pp. 209-226.

[50] J. M. Robertson et A. J. Yorgiadis. — *Internal friction in engineering materials.* Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, vol. 13 (sept. 1946), pp. A-173-A-182.

[51] J. Sapaly. — *Sur l'emploi des photomultiplicateurs en photoélasticimétrie.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 27 avril 1959.

[52] J. A. Sauer et W. J. Oliphant. — *Proceedings of the American society for Testing Materials*, 49 (1949).

[53] Von H. Schwieger, V. Reimann. — *Spannungsoptische Untersuchung des Balkenquerstosses.* IX^{e} Congrès International de Mécanique appliquée, tome VIII, pp. 336-351.

[54] D. A. Senior. — *High speed photoelasticity — Development and application.* Engineering (22 août 1958), pp. 248-254.

[55] D. A. Senior et A. A. Wells. — *A photoelastic study of stress waves.* Philosophical Magazine, series 7, vol. 37 (juil. 1946), pp. 463-469.

[56] G. W. Sutton. — *A Photoelastic study of strain waves caused by cavitation.* Journal of Applied Mechanics (Contribution of the American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division) vol. 24, n° 3 (sept. 1957), pp. 340-348.

[57] S. Timoshenko. — *Théorie des vibrations.* Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Paris (1954).

[58] Ziro Tusi et M. Nisida. — *Photoelastic study of stresses due to impact.* Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research, vol. 26, n° 566 (avril 1935), pp. 277-309.

[59] Z. Tuzi. — *Photographic and kinematographic study of photo-elasticity.* Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research, vol. 8, n° 149 (20 juin 1928), pp. 247-267.

[60] G. F. Weissman, V. Han Pao, J. Martin. — *Prediction of creep under fluctuating stress and damping from creep under constant stress.* Proceeding of the 2nd U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 581-582.

[61] F. Zandman. — *Étude de la déformation et de la rupture des matières plastiques.* Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, PST n° 291 (1954).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

EXPOSÉ DE QUELQUES RÉSULTATS RÉCEMMENT OBTENUS SUR LA FONCTION DE RÉPARTITION DES VITESSES MOLÉCULAIRES

Vu et approuvé :

Paris, le 20 février 1962.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKI.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE.

IMPRIMERIE

23229 - Imprimerie du S.D.I.T., 4, avenue de la Porte d'Issy, Paris-XV^e^
En collaboration avec l'imprimerie FIRMIN-DIDOT (Paris).

SDIT

IMPRIMERIE